Schulgeometrie als physikalische Theorie? – Zum Verhältnis von Mathematik und Realität im Sinne Günther Ludwigs

EDUARD KRAUSE, SIEGEN & JOCHEN GEPPERT, SIEGEN

***Zusammenfassung**: Der vorliegende Beitrag beschreibt eine Möglichkeit, wie formale Mathematik auf empirische Objekte angewendet werden kann. Da im Unterricht Mathematik einerseits als geistige Schöpfung eigener Art erfahren werden soll, andererseits aber auch vielfach auf die uns umgebende Wirklichkeit angewendet, oder an empirischen Objekten betrieben wird, sollten die Herausforderungen beim Anwenden von Mathematik auf Realität in der Mathematikdidaktik thematisiert werden. In der Physik hat das Nachdenken über die Anwendung formaler Mathematik auf die Wirklichkeit eine lange Tradition. Der vorliegende Artikel wendet ein Konzept zur Beschreibung des Zusammenhangs von Mathematik und Wirklichkeit aus der theoretischen Physik – die Methodologie Günther Ludwigs – auf die Schulgeometrie an, um mathematikdidaktische Anregungen zum Verhältnis zwischen Mathematik und Realität zu geben.*

***Abstract:** This paper describes an approach to how formal mathematics can be applied to empirical objects. Since, on the one hand, mathematics should be experienced in the classroom as an intellectual creation of its own kind, but, on the other hand, it is often applied to the reality surrounding us or practiced on empirical objects, the challenges should be addressed in mathematics educational research. In physics, thinking about the application of formal mathematics to reality has a long tradition. This article applies a concept for the application of mathematics to reality from theoretical physics - the methodology of Günther Ludwig - to school geometry in order to provide didactic suggestions on the relationship between mathematics and reality.*

1. Einleitung

Moderne Mathematik wird von vielen als eine Wissenschaft über rein abstrakte Entitäten aufgefasst und damit als von der Realität ontologisch losgelöst. Carl Gustav Hempel hat dies bereits in der Mitte des letzten Jahrhunderts mit folgenden Worten ausgedrückt:

> The most distinctive characteristic which differentiates mathematics from the various branches of empirical science, and which accounts for its fame as the queen of the sciences, is no doubt the peculiar certainty and necessity of its results. […] The demand for mathematical certainty in empirical matters is misguided and unreasonable; for, as we saw, mathematical certainty of knowledge can be attained only at the price of analyticity and thus of complete lack of factual content. (Hempel, 1945)

Diese ontologische Loslösung von der Realität wird seit David Hilbert nicht nur von Mathematikern selbst als wesentliche Eigenschaft der modernen Mathematik angesehen (Tapp, 2013), sondern auch seitens der Physik. So äußerte bereits Einstein:

> Diese von der modernen Axiomatik vertretene Auffassung der Axiome säubert die Mathematik von allen nicht zu ihr gehörigen Elementen und beseitigt so das mystische Dunkel, welches der Grundlage der Mathematik vorher anhaftete. (Einstein, 1921, S. 5)

Wiederum fährt er aber als Physiker fort:

> Andererseits ist es aber auch sicher, dass die Mathematik überhaupt und im speziellen auch die Geometrie ihre Entstehung dem Bedürfnis verdankt, etwas zu erfahren über die wirklichen Dinge. (ebenda)

Einstein sieht das Zusammenbringen von formaler Mathematik und Realität wie folgt realisierbar:

> Um derartige Aussagen liefern zu können, muss die Geometrie dadurch ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden, dass den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet. (Einstein, 1921, S. 5–6)

Einstein war sich z. B. bewusst, dass die Sicherheit der Mathematik – die Hempel im eingangs angeführten Zitat lobt – beim Anwenden auf die Wirklichkeit preisgegeben werden muss, wenn er sagt:

> Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. (Einstein, 1921, S. 3–4)

Die Ambivalenz der Mathematik als abstraktes, absolut sicheres Theoriegebäude einerseits und „Hilfswissenschaft“ zum Wirklichkeitsverständnis andererseits sollte von der Mathematikdidaktik stärker thematisiert werden. Mathematik soll in der Schule von Schülerinnen und Schülern in vergleichbarer Weise einerseits als geistige Schöpfung und deduktiv geordnete Welt eigener Art kennengelernt und begriffen werden (Winter, 1996), andererseits sollen mit Mathematik auch Erscheinungen der Welt aus den Bereichen Natur, Gesellschaft und Kultur in spezifischer Weise wahrgenommen und verstanden werden (ebenda). In Einsteins Worten ausgedrückt muss Mathematik in der Schule folglich ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden und den

Begriffen müssen erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit zugeordnet werden. Für einen solchen empirischen Charakter der Mathematik in der Schule sprechen einige Gründe, wie z. B. Lisa Hefendehl-Hebeker ausführt (2016, S. 16):

> Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist. Damit geht die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus. (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16)

Die Zuordnung zwischen mathematischen Objekten und realen Gegenständen, von der Einstein spricht, wirft Fragen auf, die in der Schulmathematik und Mathematikdidaktik z. B. beim Thema Modellieren von hoher Relevanz sind, da mathematisches Modellieren als das Anwenden von Mathematik definiert wird, um komplexe Probleme aus der Realität zu lösen (Greefrath et al., 2013, S. 11; Niss et al., 2007; Verschaffel et al., 2000), oder wie Leiss und Blum es ausdrücken (2010, S. 40 f.):

> Beim Modellieren geht es darum, eine realitätsbezogene Situation durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen.

Im Zentrum des mathematischen Modellierens stehen folglich Übersetzungsprozesse zwischen der Realität und der Mathematik (Rellensmann, 2019). In den mathematikdidaktischen Modellen des Modellierens, den Modellierungskreisläufen, wird aus Sicht der Autoren zu selten auf die Herausforderungen bei der Verknüpfung dieser beiden „Welten“ eingegangen. Wo genau wird die Schwelle zur Mathematik überschritten? Ist ein Problem in die Mathematik übersetzt, wenn es in mathematischer, symbolischer Form notiert wird? Oder besteht das Überführen in die Mathematik in der Reduktion des Sachverhalts auf wenige relevante, wahre Aussagen, deren logische Implikationen beim Lösen analysiert werden? Es ist klar, dass die Frage, was Mathematisieren meint, nur beantwortet werden kann, wenn ein klares Theoriekonzept zugrunde gelegt wird. Auf die Bedeutung eines solchen Theoriebezugs beim Modellieren hat Freudenthal schon zu Beginn der neueren Modellierungsdiskussionen beim epistemologischen oder theoretischen Modellieren hingewiesen (Freudenthal, 1968). Mathematisieren bezeichnet er als lokales Ordnen und Strukturieren mathematischer und nichtmathematischer Felder und betont dabei stark die klassischen Anwendungen der Mathematik in der Physik (Borromeo Ferri et al., 2013, S. 22). Das Erforschen der Herausforderungen beim Anwenden von Mathematik auf die Realität hat in der theoretischen Physik eine lange Tradition. Der vorliegende Artikel hat zum Ziel, das im deutschsprachigen Raum wahrscheinlich bekannteste Theoriekonzept zur Beschreibung der Rolle der Mathematik in der theoretischen Physik – die Methodologie Günter Ludwigs – für die mathematikdidaktische Diskussion zum Verhältnis von Mathematik und Realität fruchtbar zu machen. Dem liegt die Hypothese zugrunde, dass Schulmathematik als Quasi-Naturwissenschaft aufgefasst (Schoenfeld, 1985) und als empirische Theorie rekonstruiert werden kann (Burscheid & Struve, 2018). Gerade mit Blick auf die Geometrie hat Horst Struve dabei folgende Fragen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I aufgeworfen:

> 1) Sollen die Schüler auf der Sek. I die Begriffe „Gerade“, „Ebene“ und „geometrische Abbildung“ überhaupt erwerben?
>
> 2) Kann man diese Begriffe im Geometrieunterricht der Sek. I überhaupt vermitteln und wenn ja, wie?
>
> 3) Wie kann man eine empirische Theorie zu einer mathematischen Theorie weiterentwickeln?
>
> 4) Kann man den Geometrieunterricht so gestalten, dass die Schüler von Anfang an eine mathematische Theorie lernen?
>
> 5) Sind in der Schule überhaupt mathematische Theorien vermittelbar?
>
> 6) Sollen im Geometrieunterricht empirische oder mathematische Theorien gelehrt werden?
>
> 7) Wenn Schüler im Geometrieunterricht eine empirische Theorie lernen, handelt es sich dann um Mathematikunterricht oder nur um „Phänomenologie“? (Struve, 1990, S. 77 f.)

Die ausführliche Diskussion dieser Fragen würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, aber der vorgestellte Ansatz kann eine Grundlage schaffen, um Fragen dieser Art nachzugehen. Dabei wird in Anlehnung an das Theoriekonzept Ludwigs in diesem Beitrag diskutiert, in welchem Verhältnis eine formale mathematische Theorie – die Geometrie – mit empirischen Objekten – gezeichneten Kurven auf einem Blatt Papier – steht, mit dem Ziel, auf die Herausforderungen beim Anwenden von Mathematik auf Realität hinzuweisen. Mit der Annahme, dass die Schulmathematik epistemologisch mit der Physik verglichen werden kann, soll der implizite empirische Charakter explizit gemacht werden. Damit soll verdeutlicht werden, dass die Ambivalenz zwischen dem formalen und dem empirischen Charakter der Schulmathematik epistemologischer Art ist und nicht bloß an der Notation ausgemacht werden kann, d. h. Mathematik ist nicht gleich formal, wenn ein Sachverhalt symbolisch notiert wird.

In Kapitel 2 wird das Konzept Ludwigs kurz ausgeführt und in Kapitel 3 auf die Schulgeometrie angewandt, ganz im Sinne der Hypothese, dass

Schulgeometrie rein epistemologisch als Physik anzusehen ist. In Kapitel 4 wird ein Ausblick gegeben, welche konkreten Anwendungen dieser Ansatz in der Mathematikdidaktik finden kann.

2. Die Methodologie Günter Ludwigs

2.1 Zur wissenschaftlichen Einordnung des Theoriekonzepts Günther Ludwigs

Günther Ludwig (1918-2007) war ein deutscher theoretischer Physiker. Ludwig arbeitete u. a. an der Axiomatisierung der Quantenmechanik und forschte zum quantenmechanischen Messprozess und der Entstehung von Irreversibilität in der Quantenmechanik. Die wissenschaftstheoretischen Arbeiten Günther Ludwigs können dem Strukturalistischen Theoriekonzept zugeordnet werden. Der wissenschaftstheoretische Strukturalismus ist ein Forschungsprogramm, das zum Ziel hat, eine mengentheoretisch notierte Metabeschreibung von Theorien zu formulieren (siehe z. B. Stegmüller, 1979; Balzer & Moulines, 1996). Es wurden Theorien aus sehr unterschiedlichen Bereichen strukturalistisch rekonstruiert, z. B. aus dem Bereich der Linguistik (de Saussure, 1967), der Anthropologie (Lévi-Strauss, 2012) aber auch der Physik. Ein Theoriekonzept dieser Art ist die Methodologie Günther Ludwigs, die er vor allem in dem Werk „Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie“ (1990) oder in der englischen Abhandlung „A New Foundation of Physical Theories“ (Ludwig & Thurler, 2006) veröffentlicht hat. Neben Ludwig haben auch der deutsche Philosoph Erhard Scheibe (1997) und der amerikanische Physiker Joseph D. Sneed (1979) strukturalistische Rekonstruktionen der Physik entwickelt. Ludwigs Meta-Beschreibung der Physik soll im Folgenden in Anlehnung an die Darstellung in „Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik“ (Ludwig, 1979) kurz ausgeführt werden.

2.2 Die drei Hauptteile einer physikalischen Theorie

Die Methode der theoretischen Physik besteht nach Günter Ludwig in der Anwendung der Mathematik auf die Wirklichkeit, wobei er unter Wirklichkeit das versteht, was der experimentellen Methode zugänglich ist. Eine physikalische Theorie (im Folgenden PT genannt) bestimmt sich deshalb aus drei Teilen:

- einer mathematischen Theorie (kurz MT)
- einem Wirklichkeitsbereich (kurz W)
- einer (oder mehreren) Abbildungsprinzipien, kurz (-)

Abkürzend kann man also sagen:

$$PT = MT\ (-)\ W$$

Ludwig betont dabei, dass die Mathematik nicht mit ihrer Anwendung verwechselt werden darf, sondern dass eine MT völlig allein für sich bestimmt werden muss. Die Axiome der MT können nicht aus irgendwelchen (insb. experimentellen) Erfahrungen deduziert werden. Wobei dies jedoch nicht bedeutet, dass eine spezielle MT nicht durch die Physik angeregt werden kann (und dies natürlich auch schon häufig so geschehen ist). Eine MT ist bestimmt durch die Spielregeln des Beweisens und einer Reihe von Axiomen.

Die beiden anderen Teile W und (-) sind nicht unabhängig von der mathematischen Theorie; es muss aber zumindest gefordert werden, dass der Wirklichkeitsbereich W etwas enthält, was nicht durch MT und (-) erfasst werden kann. Hier kann man beispielsweise an die Schwärzung einer Photoplatte im Doppelspaltexperiment denken. Eine solche geschwärzte Platte lässt sich vorzeigen, ist somit ein Element des Bereiches der realen Gegebenheiten G. Dieses empirische Ergebnis kann mathematisch insofern erfasst werden, dass man die Lage der Schwärzungspunkte als Amplitudenquadrat der Wellenfunktion des Experiments berechnet. Wie aber nun der genaue Zusammenhang zwischen dem Anfang des Experiments als Erzeugung von Mikroobjekten (Elektronen) und der Registrierung durch die Photoplatte zu verstehen ist, dazu braucht es zusätzlich zur Mathematik axiomatisch postulierte Verknüpfungen mit dem Experiment. W wird dabei durch die Angabe eines Bereiches realer Gegebenheiten mitbestimmt, der schon vor jeder Verbindung (-) von W und MT gegeben war. Ludwig betont, dass die theoretische Physik aus vielen verschiedenen Theorien besteht und es vorkommen kann, dass die realen Gegebenheiten eines Grundbereiches G_1 einer physikalischen Theorie PT_1 erst aufgrund einer anderen Theorie PT_2 bestimmbar sind. Beispielsweise sind die realen Gegebenheiten des Grundbereiches G_{El} der Elektrodynamik erst dann bestimmbar, wenn man die Mechanik als Vortheorie voraussetzt.

Zusammengefasst kann man sagen, dass der Wirklichkeitsbereich W einer Theorie in der Ludwig’schen Methodologie aus der Angabe der Abbildungsprinzipien (-), der mathematischen Theorie MT und des zugehörigen Bereiches der realen Gegebenheiten G besteht.

2.3 Der Grundbereich der realen Gegebenheiten

Es verhält sich im Rahmen des Grundbereichs G eines Wirklichkeitsbereichs W so, dass durch die realen Gegebenheiten (beispielsweise ein Stuhl, der im Zimmer steht, ein Stein, der vom Dach fällt etc.) die Axiome der physikalischen Theorie PT motiviert werden. Die realen Gegebenheiten werden als gegeben betrachtet und Ludwig betont, dass etwas vorweg Gegebenes nicht erst implizit definiert werden kann, es kann nur vorgezeigt werden.

Die Verhältnisse sind also gerade entgegengesetzt zur Mathematik. Dort erhalten die Objekte erst durch die a priori gegebenen Axiome ihren Platz und durch Zuweisung ihre Bedeutung im logischen Aufbau der Theorie. Im Rahmen der Entwicklung einer PT erhalten ihre Axiome erst durch die realen Gegebenheiten bzw. Objekte der Empirie ihre Bedeutung. Beispielsweise sind in der Mathematik die Begriffe „Punkt" und „Gerade" nicht a priori bekannt, so dass man aus ihnen die euklidischen Axiome ableiten könnte. In der Physik dagegen müssen reale Gegebenheiten als gegeben akzeptiert werden, da man anders Physik gar nicht als Wissenschaft betreiben kann. Aus ihnen werden dann zusammen mit der mathematischen Theorie und den Abbildungsprinzipien die physikalischen Axiome einer PT motiviert. Eines der Axiome der Quantenmechanik beinhaltet beispielsweise die Verknüpfung zwischen physikalischen Größen wie Energie, Ort, Impuls, Drehimpuls etc. und gewissen mathematischen Objekten, hier den selbstadjungierten Operatoren des Hilbertraumes. Reale Gegebenheiten lassen sich „vorzeigen". Damit ist nicht nur das Vorzeigen realer Tatsachen zu verstehen, sondern auch das Darstellen im Rahmen einer anderen physikalischen Vortheorie. So kann das Vorzeigen einer Kraftwirkung eines elektrisch geladenen Leiters auch im Rahmen der Elektrodynamik als reale Gegebenheit gelten. Die physikalische Größe „Kraft" wurde ja in der Vortheorie „Mechanik" definiert. Der elektrische Strom kann jedoch im Rahmen der Elektrodynamik keine reale Gegebenheit sein.

Um den Unterschied zwischen realem Grundbereich und Wirklichkeitsbereich zu erläutern, betrachtet Ludwig die Thermodynamik als physikalische Theorie. Zu ihrem realen Grundbereich gehören das Volumen (Vortheorie „Raumvermessung") und der Druck, als Kraftwirkung aus der Vortheorie „Mechanik". Es gehört jedoch nicht die Temperatur dazu, denn diese wird erst in der Thermodynamik als zum Wirklichkeitsbereich dieser Theorie gehörend festgelegt.

Ludwig betont, dass zum Bereich der realen Gegebenheiten nicht Aussagen über physikalische Vorgänge, sondern die physikalischen Vorgänge selbst gehören! Zur Verdeutlichung benutzt Ludwig das Bild des Lesens eines Buches. Genauso wie der konkret vorliegende Text eines Buches gegeben ist, sind die realen Sachverhalte eines Grundbereiches gegeben und werden von Ludwig somit auch „Realtexte" genannt. So wie man sich beim Analysieren eines Buches nicht mehr mit Fragen des Lesen Lernens beschäftigt, beschäftigt sich eine physikalische Theorie PT nicht mit dem Erkennen eines Realtextes. Die Anerkennung eines Realtextes einer PT als „richtig" ist nicht Sache der PT selbst, sondern muss vorher, also a priori, relativ zur PT geschehen. Erhält man in diesem Rahmen jedoch viele „widersprüchliche Realtextstücke", so müsste man die PT verwerfen.

Ludwig stellt sich dem Einwand, dass man beim Lesen eines Realtextes Täuschungen unterliegen kann, mit der Erwähnung, dass man diese Täuschungen zwar niemals ausschließen kann, jedoch Physik eben auf diese Weise gemacht werde und ihr Erfolg ihre Methode rechtfertige. Die Frage nach der Berechtigung solcher unmittelbar gegebenen Tatsachen als reale Tatsachen wird von der Physik nicht gestellt und auch nicht beantwortet. Andernfalls wäre das Betreiben von Physik auch gar nicht möglich.

Der Grundbereich G einer PT ist der Tatsachenbereich, auf dem die PT basiert und dessen Existenz nicht erst durch die betrachtete PT bewiesen wird. Der Grundbereich wird dabei als begriffliche Zusammenfassung „aller" Realtexte aufgefasst, neue Realtexte kommen durch neue Experimente hinzu.

2.4 Der Aufbau einer mathematischen Theorie

Der Aufbau einer mathematischen Theorie vollzieht sich in mehreren Schritten:

(1) Es werden zunächst Regeln angegeben, nach denen die mathematisch erlaubte Sprache formuliert wird. Diese Sprachregeln sind Spielregeln, nach denen Worte (Zeichen) aneinanderzureihen sind, damit sogenannte sinnvolle Formulierungen entstehen. Solche Worte sind beispielsweise „und", „oder", „nicht". Es werden daneben Zeichen und Worte für sogenannte „Objekte" und „Relationen" benutzt und es werden Regeln angegeben, nach denen man „sinnvolle Objekte" bzw. „sinnvolle Relationen" formulieren kann.

Diese Sprachregeln haben nichts mit der Physik zu tun, dennoch werden nachträglich (!) physikalische Sachverhalte später mit Hilfe der Abbildungsprinzipien in „mathematischer Sprache" niedergeschrieben.

(2) Die Auszeichnung der (intuitiv gesprochen) „wahren Aussagen" geschieht in der Mathematik durch die Aufstellung von Axiomen und die Durchführung von Beweisen. Die Axiome werden in der Mathematik gesetzt und sind nicht das Ergebnis eines Erkenntnisaktes. So lässt sich statt des Axioms „A" auch das Axiom „nicht A" setzen! Die Axiome setzen sich zusammen aus den explizit angegebenen Axiomen und den „axiomatischen Regeln des

Schließens“. Diese Regeln erlauben es, aus den Axiomen neue „wahre“ Aussagen abzuleiten, die man Sätze nennt. Eine solche Ableitung nennt man Beweis und in den Beweisverfahren gehen die üblichen logischen Regeln als axiomatische Regeln ein. Dies bedeutet insbesondere, dass in der Entwicklung einer physikalischen Theorie die klassische Logik für alle physikalischen Fragen eingeht. Es werden ja im Verlauf der Entwicklung reale Begebenheiten mit Hilfe der Abbildungsprinzipien in mathematischer Sprache formuliert und zur MT als physikalische Axiome hinzugefügt. Es reicht z. B. nicht, allein die mathematische Theorie des Hilbertraumes zu studieren, wenn deren Objekte mit ihren Eigenschaften nicht durch axiomatische Postulate mit Messergebnissen in Verbindung gebracht werden. Diese physikalisch motivierten Axiome werden den Axiomen des Hilbertraumes zur Seite gestellt.

(3) Ludwig setzt in allen mathematischen Theorien die axiomatische Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel voraus.

(4) Dann erst werden die „typischen“ Axiome eingeführt, die die jeweilige mathematische Theorie ausmachen.

2.5 Die Abbildungsprinzipien

Ludwig legt bei der Einführung der Abbildungsprinzipien eine Reihe aufeinanderfolgender Schritte fest:

1. Schritt: „Zeichensetzung“

Im Realtext werden wohldefinierte Stücke durch „Zeichen“ (zumeist Buchstaben) eindeutig gekennzeichnet. Der Vorteil besteht darin, dass diese Zeichen in mathematischen Relationen und Beweisen mitbenutzt werden können. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass nun bestimmte Realtexte ausgezeichnet werden. Dabei sollen nur die Zeichen benutzt werden, die auch bei der Aufstellung der Abbildungsaxiome benutzt werden. Einen so mit Zeichen versehenen Realtext bezeichnet Ludwig dann als genormten Realtext.

2. Schritt: Einführung des Begriffs „Abbildungsprinzip“

Ludwig versteht darunter das Wie des Anwendens einer mathematischen Theorie MT auf die im Realtext vorgefundenen Dinge und Beziehungen. Unter Abbildungsprinzipien versteht Ludwig die Regeln, die es erlauben, aufgrund des Realtextes und der in MT vorkommenden Zeichen die unter $(-)_r$ angegebenen Abbildungsaxiome aufzuschreiben.

3. Schritt: Auszeichnung von Bildmengen

In MT werden gewisse Mengen $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ausgezeichnet und als Bildmengen bezeichnet.

Beispiel: Q_1 sei die Menge der Zeichen von Raumstellen (die man experimentell durch gekreuzte Fäden bestimmt hat), dann bedeutet $a \in Q_1$, a ist Zeichen für eine reale Raumstelle. Die Menge besteht nicht aus realen Raumstellen, sondern aus den Zeichen für reale Raumstellen.

4. Schritt: Auszeichnung von Bildrelationen

Durch die Abbildungsprinzipien zeichnet man in MT gewisse Relationen

$$R_1(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \dots, \gamma_1), \dots, R_m(x_{\alpha_m}, x_{\beta_m}, \dots, \gamma_m)$$

$$x_{\alpha_i} \in Q_{\alpha_i}, x_{\beta_i} \in Q_{\beta_i}, \dots, \gamma_i \in \mathbb{R}, \alpha_i, \beta_i, \dots \in \{1, \dots, n \in \mathbb{N}\}$$

aus. Das Symbol γ_i soll hierbei für eine oder mehrere reelle Zahlen stehen, die in einer Bildrelation vorkommen können.

Jede Bildrelation kann in der Form

$$R \subseteq Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n \times \mathbb{R}$$

geschrieben werden.

Beispiel: Die oben erwähnte Abstandsbeziehung $d(a, b)$

Die am Längenmaßstab abgelesene Zahl 4.51 wird dann durch die Abbildungsprinzipien zu einer Relation $R_1(a, b; 4.51)$: $d(a, b) = 4.51$.

5. Schritt: Aufstellung von Regeln zur Typisierung des Realtextes

Die Zeichen (beispielsweise $A_1, \dots, A_n$) des genormten Realtextes werden durch Axiome der Form:

$$(-)_r(1) : A_1 \in Q_{\nu_1}, \dots, A_n \in Q_{\nu_n}$$

den Bildmengen zugeordnet.

6. Schritt: Axiome zur Erzeugung von Relationen

Hierunter versteht Ludwig die Axiome, die aus den Bildrelationen

$$R_1(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \dots, \gamma_1), \dots, R_m(x_{\alpha_m}, x_{\beta_m}, \dots, \gamma_m)$$

durch logische Verknüpfungen („und“, „oder“, „nicht“ usw.) weitere Relationen entstehen lassen:

$(-)_r(\mathbf{2})$: $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\mu}_1}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}_1}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}_1}, \dots)$ *oder* $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{\mu}_2}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}_2}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}_2}, \dots)$ *und*

(etc.)

Beide in den letzten Schritten eingeführten Axiome werden den mathematischen Axiomen der MT ergänzend zur Seite gestellt. Ludwig betont dabei, dass durch die beiden oben beschriebenen Relationen $(-)_r$ zur Mathematik nichts Fremdartiges hinzugefügt wird. Dass die in den Relationen auftretenden Buchstaben $A_1, A_2, \dots$ „nebenbei“ auch noch Zeichen für Realtextstücke sind, hat keine Bedeutung für die mathematisch formulierten Relationen. Die beiden Axiome unter $(-)_r$ sind also keine, wie sonst in der Mathematik üblich, willkürlich gesetzten Axiome, sondern sie werden durch den Realtext mit Hilfe der Abbildungsprinzipien bestimmt. Die mit A_i bezeichneten Realtextstücke erhalten durch die Zuweisung $A_i \in Q_m$ einen Namen. Es findet also keine Vermischung von Realtextstücken (die Teil der Wirklichkeit sind) und mathematischen Mengen statt. Man darf also nicht dem Irrtum verfallen und sich vorstellen, dass beispielsweise die Menge Q_m nun die Menge von Realtextstücken vom Typ Q_m sei. Sie ist die Menge von Namen von Realtextstücken! Das gilt auch für den zweiten Teil $(-)_r$ (2), der so zu verstehen ist, dass man nicht $R_{\mu_1}\left(A_{i_1}, A_{k_1}, \dots\right)$ am Realtext abliest, sondern etwas, das man dann mit Hilfe der Abbildungsprinzipien auf $R_{\mu_1}\left(A_{i_1}, A_{k_1}, \dots\right)$ bezieht.

Man darf also $R_{\mu_1}\left(A_{i_1}, A_{k_1}, \dots\right)$ nicht als physikalische Realrelation ansehen, denn zwischen mathematischen Objekten bestehen keine physikalischen Relationen.

Die Abbildungsprinzipien sind etwas Neues, das weder aus dem Realtext noch aus der MT hervorgeht. Beispiel: In der Mechanik hat man als Bildmengen eine diskrete Indexmenge *I* für die einzelnen Massenpunkte und eine Abbildung $(i, t) \to \vec{r}$, die man üblicherweise in der Form $\vec{r}^{\,i}(t)$ schreibt und die Bahn des i-ten Massenpunktes nennt. Die Massenpunkte werden direkt mit ganzen Zahlen als Zeichen versehen. Ist i eine solche Zahl, t_v eine gemessene Zeit, $\boldsymbol{\vec{r}^{\,i}_{v}}$ der zum Zeitpunkt t_v gemessene Ort des mit dem Zeichen i versehenen Massenpunktes, so ist

$$\text{in } (-)_r(\mathbf{1}) \;\; \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$$

$$\text{in } (-)_r(\mathbf{2}) \; \boldsymbol{\vec{r}^{\,i}_{v}} = \boldsymbol{\vec{r}^{\,i}(t_v)}$$

aufzuschreiben.

Ludwig diskutiert im Anschluss das Problem, welche mathematischen Konsequenzen die Aufstellung der Axiome $(-)_r$ hat. Fügt man diese Axiome der MT hinzu, so erhält man eine stärkere Theorie, die er MTA nennt. Man bezeichnet MTA auch als Test der Theorie MT oder kurz als einen Test von PT. Ist die stärkere Theorie MTA widerspruchsfrei, so sagt man, dass MT mit Hilfe der benutzten Abbildungsprinzipien den vorliegenden Realtext in brauchbarer Weise beschreibt. Eine PT ist prinzipiell nicht logisch beweisbar, da die in ihr behandelten Objekte keine idealen Objekte sind, deren Eigenschaften durch logische Schlüsse aus den Axiomen abgeleitet werden können. Eine unter Physikern anerkannte PT lässt sich experimentell beispielsweise testen, in dem man ihre theoretischen Vorhersagen in Experimenten prüft. Eindrucksvoll ist dies beispielsweise bei Vorhersagen der Quantenelektrodynamik beispielsweise bei der Messung der Feinstrukturkonstante gelungen. Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass solche Tests physikalischer Theorien kontrovers diskutiert werden und oft Anlass zu weiteren Diskussionen geben. Ludwig weist darauf hin, dass die Axiome $(-)_r$ niemals den ganzen Grundbereich G enthalten, sondern immer nur einen Teil, da immer nur endlich viele Erfahrungen herangezogen werden können und ein vorliegender Realtext niemals „alle" Erfahrungen umfassen kann. Er weist ausdrücklich darauf hin, dass eine vorliegende physikalische Theorie PT aus zwei Gründen im logischen Sinne nicht beweisbar ist. Die Zahl an neuen experimentellen Erfahrungen (und damit verbundenen möglichen Widersprüchen) unbegrenzt. Es können immer Widersprüche zur bisherigen Theorie auftreten, die entweder dadurch behoben werden, dass man das Axiomensystem der PT ändert oder eben den Grundbereich auf einen engeren Ausschnitt an Teilerfahrungen einschränkt.

Im Folgenden wird gezeigt, wie unter anderem aus der Euklidischen Geometrie als MT durch verschiedene Axiome die „Mathematische Papiergeometrie" als MTA entsteht.

2.6 Unscharfe Abbildungsprinzipien

Ludwig führt diesen wichtigen Aspekt seiner wissenschaftstheoretischen Methodologie anhand des Beispiels der oben definierten Funktion $d(x, y)$ ein. Betrachtet wird also die Relation $R(x, y, r)$, die durch $r = d(x, y)$ definiert ist, r sei hierbei eine reelle Zahl.

Würde nun zwischen zwei Stellen a und b der Abstand $\varrho = 4.51$ gemessen, so muss eine Unschärfe ε (die hier durch die Messung bedingt ist) berücksichtigt werden. Zu schreiben ist dann

$$4.50 \leq d(a, b) \leq 4.52 \text{ für } \varepsilon = 0.01.$$

Ludwig betont nun die folgenden Gesichtspunkte:

Die Ungenauigkeiten, die in der Physik sehr häufig vorkommen, haben ihren Ursprung in der Art der Zuordnung zwischen Realtext auf der einen Seite und der mathematischen Theorie auf der anderen Seite. Es ist in diesem Sinne nicht so, dass es einen „an sich exakten Abstand" geben würde, der nur ungenau beobachtet würde. Dieser Standpunkt ist seit der Entwicklung der Quantenmechanik fragwürdig geworden. Ludwigs Standpunkt ist ein anderer. Die Zuordnung zwischen Realtext und Mathematik ist prinzipiell nicht scharf.

Würde man bei der oben beschriebenen Messung einen zu kleinen Wert für ε annehmen, würde man bald merken, dass die Messergebnisse mit der Euklidischen Geometrie in Widerspruch geraten (man messe einmal die Innenwinkel in einem gezeichneten

Dreieck!). Die „Unschärfe“ ε ist also wesentlich notwendig, wenn man einen sinnvollen Vergleich zwischen der mathematischen Theorie und dem Realtext durchführen will.

Um die beschriebenen Unterschiede zwischen Realtexten auf der einen Seite und mathematischer Beschreibung auf der anderen zu handhaben, führt Ludwig dann eine uniforme Struktur durch sogenannte Unschärfemengen ein. Am obigen Beispiel bedeutet dies, dass U eine Menge von Paaren (r_1, r_2) von reellen Zahlen ist, beispielsweise in der Form

$$U = \{(r_1, r_2): |r_1 - r_2| \leq \varepsilon\}$$

geschrieben, wobei hier ε noch von $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ abhängen kann. Die Vorstellung hierbei ist, dass die beiden reellen Zahlen r_1 und r_2 nicht mehr unterscheidbar sind, wenn $(r_1, r_2) \in U$ gilt.

Es ergeben sich dann neue Relationen, etwa in der Form, dass aus $R(x, y, r)$ und der Menge U eine neue Relation $\tilde{R}(x, y, r)$ folgt, definiert durch: „Es gibt eine Zahl r mit $R(x, y, r')$ und $(r, r') \in U$.“ $\tilde{R}(x, y, \varrho)$ heißt dann: „Es gibt ein r' mit $d(a, b) = r'$ und $|r' - \varrho| \leq \varepsilon$“. Zeichnet man auf diese Weise in MT eine Unschärfemenge U aus und benutzt dann als Bildrelation nicht die „ideale“ Relation R(…), so bleibt alles im Rahmen der unter 2.5 beschriebenen Methode der Abbildungsprinzipien.

Formal geschieht die Verschmierung von Relationen durch das folgende Vorgehen: Man geht von den oben erwähnten Bildmengen $Q_1, \dots, Q_n$ aus. Genügt dann das Tupel $(A_1, A_2 \dots, \alpha)$ von ausgezeichneten Realtextstücken bzw. deren Bezeichnungen einer Relation, die durch:

$$R \subseteq Q_{\mu_1} \times Q_{\mu_2} \times \dots \times \mathbb{R}, \mu_i \in \{1,2, \dots, n\}$$

gegeben ist, so schreibt man nicht $(A_1, A_2 \dots, \alpha) \in R$, wie es die scharfen Abbildungsprinzipien vorschreiben, sondern man wählt die folgende Relation:

$$(A_1, A_2 \dots, \alpha) \in \tilde{R}^U : \leftrightarrow \exists A'_1 \in Q_{\mu_1}, \exists A'_2 \in Q_{\mu_2}, \dots, \exists \alpha' \in \mathbb{R}:$$

$$(A'_1, A'_2, \dots, \alpha') \in R \ \wedge \left((A_1, A_2 \dots, \alpha), (A'_1, A'_2, \dots, \alpha')\right) \in U$$

Hierin bezeichnet die als Unschärfemenge bezeichnete Menge U die Teilmenge

$$U \subseteq \left(Q_{\mu_1} \times Q_{\mu_2} \times \dots \times \mathbb{R}\right) \times \left(Q_{\mu_1} \times Q_{\mu_2} \times \dots \times \mathbb{R}\right)$$

mit $\mu_i \in \{1,2, \dots, n\}$.

Diese Menge ist selbst eine Bildmenge, und sie umfasst alle Paare von Tupeln aus der Menge $X := Q_{\mu_1} \times Q_{\mu_2} \times \dots \times \mathbb{R}$, die als ununterscheidbar betrachtet werden. Für einen vereinfachten Fall einer Relation $R \subseteq X := Q_1 \times Q_2 \times \mathbb{R}$, könnte man, wie beschrieben, dann als Unschärfemenge

$$U = \{[(A_1, A_2, \alpha), (A'_1, A'_2, \alpha')] \in X \times X: |\alpha - \alpha'| < \varepsilon\}$$

wählen.

Die Unschärfemengen sind notwendig, um die zu reichhaltige Struktur der mathematischen Theorie soweit abzuschwächen, dass eine Bezugnahme zwischen mathematischem Ergebnisse und realen Messergebnissen möglich ist. Im Rahmen der im folgenden Kapitel vorgestellten Papiergeometrie bedeutet dies, dass beispielsweise die reale Überprüfung des Satzes von Pythagoras der Messung der Kantenlängen an konstruierten Dreiecken etc. nicht zu Widersprüchen führt. Daneben erlaubt es das Konzept der Unschärfemengen überhaupt erst, Skizzen als Modelle mathematischer Ergebnisse zu verwenden. Das System der Unschärfemengen muss es mathematisch ermöglichen, zu immer feineren Unschärfen überzugehen, da es erlaubt sein soll, die experimentellen Entwicklungen prinzipiell nicht zu begrenzen. Konkret bedeutet das für die Papiergeometrie: Sollten feinere Messwerkzeuge im Unterricht eingesetzt werden als die handelsüblichen Geodreiecke und Winkelmesser, so sollen die mit diesen Werkzeugen verbundenen Unbestimmtheiten nicht zu Widersprüchen in der mathematischen Theorie führen. Dazu muss insbesondere sichergestellt werden, dass die Unschärfemengen eine topologische Struktur bilden, die eine eindeutige Konvergenz für $\varepsilon \longrightarrow 0$ ermöglicht.

An das System N von möglichen Unschärfemengen sollen nun folgenden Forderungen gestellt werden:

1. Jedes Realtextstück und somit auch jedes n-Tupel von Bezeichnungen für Realtextstücke und reelle Zahlen kann nicht von sich selbst unterschieden werden:

$$\bigwedge_{U \in N} \{(x, x): x \in X\} \subseteq U$$

2. Für eine Unschärfemenge $\widetilde{U}_1$ bzgl. einer Bildrelation $R \subseteq X$, die nicht zu einer widersprüchlichen mathematischen Theorie führt, soll ebenso eine beliebige Obermenge $\widetilde{U}_2 \subseteq X \times X$ eine Unschärfemenge sein, die nicht zu einer widersprüchlichen mathematischen Theorie führt:

$$\bigwedge_{\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2 \in X \times X} \widetilde{U}_2 \in N \leftrightarrow \widetilde{U}_1 \in N \wedge \widetilde{U}_1 \subseteq \widetilde{U}_2$$

Relationen, die für $\widetilde{U}_1$ gelten, gelten somit ebenfalls für $\widetilde{U}_2$.

3. Mit der Menge U soll auch die Menge U^{-1} eine Unschärfemenge sein, die zu einer widerspruchsfreien MT führt, wenn dies auch für U gilt:

$$\bigwedge_{U \in N} U^{-1} := \{(x_1, x_2) \in X \times X: (x_2, x_1) \in U\} \in N$$

4. Die Verfeinerungsbedingung:

$$\bigwedge_{U_1,U_2 \in N} U_1 \cap U_2 \in N$$

5. Die Bedingung der unbegrenzten Verfeinerung:

$$V^2 \coloneqq \{(x_1,x_2) \in X \times X : \exists z \in X : (x_1,z) \in V \wedge (z,x_2) \in V\}$$

$$\bigwedge_{U \in N} \bigvee_{V \in N} V^2 \subseteq U$$

Durch diese Forderungen, die eine Uniformität definieren, wird sichergestellt, dass man zu einer Unschärfemenge stets eine feinere finden kann und dass im Limes immer feinerer Grenzen, die unscharfen in die scharfen Abbildungsprinzipien übergehen.

3. Schulgeometrie als physikalische Theorie

Im Folgenden wird die Schulgeometrie als physikalische Theorie interpretiert, sofern dabei mit empirischen Gegenständen wie Bleistift, Zirkel und Lineal auf einem Blatt Papier umgegangen wird. Die Betrachtungen beschränken dabei den Grundbereich zuerst auf ein DIN-A4-Blatt und auf mögliche Figuren, die dort mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind.

Als mathematische Theorie wird die Axiomatisierung der Geometrie durch Hilbert verwendet. Im Kern geht es um die Frage, wie man diese abstrakten Axiome mit den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler bei der Beschäftigung mit Papierkonstruktionen in Verbindung bringen kann. Dazu sollen in diesem Artikel nur erste Anregungen gegeben werden, die zeigen, dass es sich lohnen kann, mit den Schülerinnen und Schülern im Unterricht die Geometrie entlang des Ludwig'schen Programms als physikalische Theorie kennenzulernen.

3.1 Die drei Hauptteile der Schul-Geometrie als physikalische Theorie

3.1.1 Der Grundbereich der realen Gegebenheiten

Der Grundbereich G seien optische Beobachtungen in der Natur wie z. B. Bienenwaben, Kirchenfenster, Laserstrahlen, Körpermodelle aus Holz oder auch mit Lineal, Zirkel und Bleistift auf einem DIN-A4-Bogen angefertigte Zeichnungen. Der gesamte Wirklichkeitsbereich W der Geometrie bleibt offen, um die Entdeckung möglicher neue Objekte, die Bildung von Hypothesen usw. nicht unnötig zu erschweren.

3.1.2 Die mathematische Theorie

Ludwig setzt grundsätzlich für alle mathematischen Theorien die axiomatische Mengenlehre nach Zermelo-Fraenkel (vgl. Ebbinghaus et al., 2018) voraus. Die mengentheoretisch definierten Zeichen $\in, \subseteq$ werden dabei im Zusammenhang mit Punkten und Geraden als *liegt auf* bzw. *geht durch*, einheitlich als *inzidiert mit* gelesen.

Da in diesem Artikel keine vollständige Darstellung der Papiergeometrie anstrebt wird, sollen nur die folgenden Definitionen und Axiome Hilberts Verwendung finden.

Grundbausteine (I)

- Eine Menge $\mathcal{E}$, deren Elemente *Punkte* genannt werden.
- Eine Teilmenge $\mathscr{g} \subseteq P(\mathcal{E})$, deren Elemente *Geraden* genannt werden.
- Eine Teilmenge $\mathfrak{Z} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Für das Tupel $(A,B,C) \in \mathfrak{Z}$ wird auch $A * B * C$ geschrieben und gemeint ist „B liegt zwischen A und C" (auf einer Geraden) (siehe hierzu auch das Axiom (L1) weiter unten).

Die Inzidenzaxiome

(I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

(I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

(I3) Es gibt drei verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.

Def.

- Eine Kollektion von Punkten heißt *kollinear*, wenn eine Gerade existiert, die alle diese Punkte enthält.
- Für eine Gerade *g* und Punkte *A*, *B*, die nicht auf g liegen sollen, wird gesagt, dass *A* und *B* auf *entgegengesetzten Seiten von g liegen*, falls g einen Punkt zwischen *A* und *B* enthält, und andernfalls, dass *A* und *B auf derselben Seite von g liegen*.

Die Anordnungsaxiome

(A1) Liegt *B* zwischen *A* und *C*, so sind *A*, *B*, *C* drei verschiedene Punkte einer Geraden und *B* liegt auch zwischen *C* und *A*.

(A2) Sind *A* und *B* verschiedene Punkte, so gibt es einen Punkt *C*, so dass *B* zwischen *A* und *C* liegt.

(A3) Sind *A*, *B*, und *C* drei verschiedene Punkte einer Geraden, so liegt genau einer von ihnen zwischen den beiden anderen.

(A4) Sei *g* eine Gerade und es seien *A*, *B* und *C* nicht kollineare Punkte außerhalb von *g*. Wenn *A* und *B* auf entgegengesetzten Seiten von *g* liegen, so liegen entweder *A* und *C* auf entgegengesetzten Seiten von *g* oder *B* und *C* auf entgegengesetzten Seiten *g*, aber nicht beides. (Axiom von Pasch)

Def.

1. Für verschiedene Punkte A und B heißt die Menge

$$AB \coloneqq \{A, B\} \cup \{C \in \mathcal{E}: A * C * B\}$$

eine *Strecke*.

2. Die Menge

$$\overrightarrow{AB} \coloneqq AB \cup \{C \in \mathcal{E}: A * C * B\}$$

ein *Strahl*.

3. Für drei nicht kollineare Punkte A, B und C, heißt die Menge:

$$\measuredangle BAC \coloneqq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

ein *Winkel*.

Grundbausteine (II)

- Eine Relation $\cong$ auf der Menge aller Strecken. Für $AB \cong A'B'$ wird gesagt, AB *ist kongruent zu* $A'B'$.
- Eine Relation $\simeq$ auf der Menge aller Winkel. Für $\measuredangle BAC \simeq \measuredangle B'A'C'$ wird gesagt, $\measuredangle BAC$ *ist kongruent zu* $\measuredangle B'A'C'$.

Die Axiome der Kongruenz

(K1) Für jede Strecke AB und je zwei verschiedene Punkte A' und C' existiert ein eindeutiger Punkt $B' \in \overrightarrow{A'C'}$ mit der Eigenschaft $AB \cong A'B'$.

(K2) Die Relation $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation.

(K3) Gilt $A * B * C$ und $A' * B' * C'$ sowie $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$.

(K4) Für jeden Winkel $\measuredangle BAC$, je zwei verschiedene Punkte A' und C' einer Geraden g und jeden Punkt $D' \notin g$ existiert ein eindeutiger Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ mit $B' \notin g$, so dass $\measuredangle BAC \simeq \measuredangle B'A'C'$ ist und B' und D'auf derselben Seite von g liegen.

(K5) Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation.

(K6) Sind A, B und C nicht kollinear und A', B' und C' nicht kollinear und gilt $AB \cong A'B'$ und $BC \cong B'C'$ und $\measuredangle ABC \simeq \measuredangle A'B'C'$, so gilt auch $AC \cong A'C'$ und $\measuredangle BAC \simeq \measuredangle B'A'C'$ und $\measuredangle BCA \simeq \measuredangle B'C'A'$.

Das Parallelenaxiom

(P) Ist g eine Gerade und A ein Punkt, der nicht auf g liegt, so gibt es höchstens eine Gerade durch A, welche g nicht schneidet.

Die Stetigkeitsaxiome

(S1) (Archimedisches Axiom) Für jede Strecke AB und je zwei verschiedene Punkte A' und B' existieren eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Punkte $C_0, C_1, \ldots, C_n \in \overrightarrow{A'B'}$ mit $C_0 = A'$ und den folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $i \in \{1,2, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$C_{i-1} * C_i * C_{i+1}.$$

2. Für jedes $i \in \{1,2, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$C_{i-1}C_i \cong AB$$

3. Es gilt:

$$A' * B' * C_n$$

(S2) (Dedekind'sches Axiom) Ist eine Gerade g die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Teilmengen S und T, und liegt kein Punkt von S zwischen zwei Punkten von T und kein Punkt von T zwischen zwei Punkten von S, so existiert ein eindeutiger Punkt A auf g, so dass für jeden Punkt $B \in S\backslash\{A\}$ und jeden Punkt $C \in T\backslash\{A\}$ der Punkt A zwischen B und C liegt.

3.1.3 Die Abbildungsprinzipien der „Papiergeometrie"

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie der oben dargestellte Teil der mathematischen Theorie mit den vorgefundenen Realtexten der Papiergeometrie durch neue Axiome verknüpft werden kann, die dann selbst zur mathematischen Theorie hinzugefügt werden.

Die erste Einschränkung des Grundbereichs soll so gestaltet werden, dass allein ein einzelnes DIN-A4-Papier auf einem ebenen Tisch liegend, betrachtet wird. Eine Krümmung des Tisches infolge der Gravitation wird vernachlässigt. Diese idealisierende Nebenbedingung könnte aufgegeben werden, um einen Einstieg in die nichteuklidische Papiergeometrie zu ermöglichen. Unter Papiergeometrie soll nun alles verstanden werden, was mit Bleistift, Lineal und Zirkel sowie per Faltung des Papiers auf einem stabilen Tisch konstruiert werden kann. Die zu definierenden Gebilde sollen alle mit dem Bleistift zeichenbar und mit dem bloßen Auge zu erkennen sein. Als Vortheorie zur P-Geometrie soll die Theorie der Hilfsmittel und ihrer Benutzung (also von Zirkel, Lineal, Winkelmesser und Stiften) angesehen werden. Die Hilfsmittel seien hinreichend stabil gebaut und ohne Fehler.

Es werden im Folgenden nun zuerst Realtexte aus der Papiergeometrie mit ihren Bezeichnungen versehen. Im darauffolgenden Abschnitt werden dann die scharfen und unscharfen Abbildungsprinzipien eingeführt. Bei der Beobachtung obiger Gegenstände oder der eigenen Arbeit mit Zirkel, Lineal und Bleistift machen die Schülerinnen und Schüler elementare Erfahrungen, die sich als Realtexte und deren Eigenschaften im Ludwig'schen Sinne interpretieren lassen. Diesen werden dann Bezeichnungen zugeordnet, etwa in der folgenden Weise:

Realtexte: „Abbildungsprinzipien $(-)_r(1)$"

- P_S : ist eine fixierte Stelle auf dem Papier
- P_L : ist eine mit dem Lineal gezeichnete Linie, ohne fixierte Stellen
- P_{Str}: ist eine mit dem Lineal gezeichnete Linie zwischen zwei fixierten Stellen, eine sogenannte *„P-Strecke"*
- P_W: ist ein Winkel mit einer fixierten Scheitelstelle
- P_K: ist ein mit dem Zirkel gezeichneter Kreis und fixierter Mittelpunktstelle

Man kann sich bei den obigen Bezeichnungen ganz konkret vorstellen, dass im Unterricht Bleistiftkonstruktionen betrachtet werden, in denen eigentümliche Teile identifiziert werden. Ein Beispiel einer solchen Konstruktion wäre ein Dreieck mit seinem Umkreis. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass auf dem Papier nur mit P-Strecken umgegangen wird, dass also jede gezeichnete Linie mit mindestens zwei fixierten Stellen versehen ist. An dieser Stelle ist eine weitere Voraussetzung notwendig. Bei den obigen Festsetzungen wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die gezeichneten Linien immer bis zum Blattrand verlängerbar gezeichnet werden können. Die spätere Übertagung beispielsweise des Axioms von Pasch (L4) wäre sonst nicht möglich. Beginnt man nun mittels vorhandener Werkzeuge Sachverhalte zu untersuchen, konkret also hier Abstände und Winkel zu messen, so entstehen die folgenden Eigenschaften, die mathematisch Relationen darstellen.

Eigenschaften: „Abbildungsprinzipien $(-)_r(2)$"

- $R_{Ab}\left(P_{S_1}, P_{S_2}, d\right)$: zwei fixierte Stellen haben einen gemessenen Abstand *d*
- $R_{Str}\left(P_{S_1}, P_{S_2}, d\right)$: eine gezeichnete Strecke der gemessenen Länge *d*
- $R_W\left[P_{Str_1}\left(P_{S_1}, P_{S_2}\right), P_{Str_2}\left(P_{S_1}, P_{S_3}\right), \xi\right]$: ein Winkel mit gemessenem Wert ξ zwischen zwei Strecken mit gemeinsamer Anfangsstelle
- $R_K(P_S, r)$: ein gezeichneter Kreis mit fixierter Mittelpunktstelle und gemessenem Radiuswert *r*.

Diese Relationen werden dann entsprechend dem oben vorgestellten Verfahren noch mit einer Unschärfemenge versehen. Für die obigen Relationen soll das Verfahren an der ersten Relation vorgeführt werden, für alle weiteren verläuft es ganz ähnlich:

Statt $(P_1, P_2, \delta) \in R_{Ab}\left(P_{S_1}, P_{S_2}, d\right)$ wird

$$(P_1, P_2, \delta) \in \tilde{R}_{Ab}^{U_{Ab}} :\leftrightarrow \exists P_1' \in P_S, \exists P_2' \in P_S, \\ \exists \delta' \in \mathbb{R}: (P_1', P_2', \delta') \in R_{Ab}\left(P_{S_1}, P_{S_2}, d\right)$$

und $[(P_1, P_2, \delta), (P_1', P_2', \delta')] \in U_{Ab}$, geschrieben wobei

$$U_{Ab} = \{[(P_1, P_2, d), (P_1', P_2', d')] \\ \in \left(P_{S_1} \times P_{S_2} \times \mathbb{R}\right) \\ \times \left(P_{S_1} \times P_{S_2} \times \mathbb{R}\right): |d - d'| < \varepsilon\}$$

Für Betrachtung im Unterricht wählen bietet sich $\varepsilon = 1(mm)$ an, da keine genaueren Lineale zur Verfügung stehen. Das gilt ebenso für die zweite und die letzte Relation. Für die Messung des Winkels wird dann entsprechend $\varepsilon = 1(°)$ gewählt.

3.1.4 Die Axiome der „Papiergeometrie"

Der nächste Schritt im Ludwig'schen Programm besteht dann in der Aufstellung von Axiomen im Bildbereich, die dann der mathematischen Theorie zur Seite gestellt werden und somit die von Ludwig mit MTA bezeichnete erweiterte mathematische Theorie darstellt. An dieser Stelle soll insbesondere darauf hingewiesen werden, dass sich die gesamte bisherige Papiergeometrie auf ein einzelnes Blatt Papier bezieht, dessen Größe keine Rolle spielt – hier wird ein DIN-A4-Papier gewählt. Daneben ist es wichtig, sich die obige Bemerkung zur Verlängerbarkeit von gezeichneten Linien bewusst zu machen, die im Folgenden immer implizit vorausgesetzt wird. Um die Gemeinsamkeiten aber auch die Unterschiede zwischen der Papiergeometrie als physikalischer Theorie und ihrer Axiome, sollen die Axiome und Definitionen an den obigen der MT orientiert sein. Die Axiome und Definitionen der Papiergeometrie dürfen dabei nicht zu Widersprüchen mit den mathematischen Axiomen führen, sondern werden diesen zur Seite gestellt. Ziel der Aufstellung dieser Axiome ist es, die Unterschiede zwischen den mathematischen Aussagen und ihrer experimentellen Überprüfung auf dem Papier „einzufangen".

Die Grundbausteine der P-Geometrie

Man beachte, es handelt sich bei diesen Grundelementen um Bezeichnungen für gezeichnete Objekte:

- Eine Menge $\mathcal{E}_{P_S}$, deren Elemente *fixierte Stellen* genannt werden.
- Eine Teilmenge $g_{P_{Str}} \subseteq P\left(\mathcal{E}_{P_S}\right)$, deren Elemente *P-Strecken* genannt werden.
- Eine Teilmenge $\mathfrak{Z}_P \subseteq \mathcal{E}_{P_S} \times \mathcal{E}_{P_S} \times \mathcal{E}_{P_S}$. Für das Tupel $\left(P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}\right) \in \mathfrak{Z}_P$ wird auch $P_{S_1} * P_{S_2} * P_{S_3}$ geschrieben und „ P_{S_2} *liegt auf einer P-Strecke zwischen* P_{S_1} *und* P_{S_3}"

gesagt. Siehe dazu untenstehendes Axiom (L_P1).

Die Inzidenzaxiome der P-Geometrie

(I_P1) Durch je zwei verschiedene fixierte Stellen P_{S_1}, P_{S_2} kann genau eine P-Strecke P_{Str} gezeichnet werden.

(I_P2) Jede P-Strecke P_{Str} enthält mindestens zwei verschiedene fixierte Stellen P_{S_1}, P_{S_2}.

(I_P3) Es gibt drei verschiedene fixierte Stellen $P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}$, die nicht alle auf einer P-Strecke P_{Str} liegen.

Def.

- Eine Kollektion von fixierten Stellen heißt *p-kollinear*, wenn eine P-Strecke P_{Str} existiert, die alle fixierten Stellen enthält.
- Für eine P-Strecke P_{Str} und fixierte Stellen, P_{S_1}, P_{S_2}, die nicht auf P_{Str} liegen sollen, wird gesagt, dass P_{S_1} und P_{S_2} auf *entgegengesetzten Seiten von P_{Str} liegen*, falls P_{Str} eine fixierte Stelle zwischen P_{S_1} und P_{S_2} enthält, und andernfalls, dass P_{S_1} und P_{S_2} *auf derselben Seite von P_{Str} liegen*.

Die Anordnungsaxiome der P-Geometrie

(A_P1) Liegt die fixierte Stelle P_{S_2} zwischen den fixierten Stellen P_{S_1} und P_{S_3}, so sind $P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}$ drei verschiedene fixierte Stellen einer P-Strecke P_{Str} und P_{S_2} liegt auch zwischen P_{S_3} und P_{S_1}.

(A_P2) Sind P_{S_1} und P_{S_2} verschiedene fixierte Stellen, so gibt es eine fixierte Stelle P_{S_3} so dass P_{S_2} zwischen P_{S_1} und P_{S_3} liegt.

(A_P3) Sind $P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}$ drei verschiedene fixierte Stellen einer P-Strecke, so liegt genau eine von ihnen zwischen den beiden anderen.

(A_P4) Sei P_{Str} eine P-Strecke und es seien $P_{S_1}, P_{S_2}, P_{S_3}$ P-kollineare fixierte Stellen außerhalb von P_{Str}. Wenn P_{S_1} und P_{S_2} auf entgegengesetzten Seiten von P_{Str} liegen, so liegen entweder P_{S_1} und P_{S_3} auf entgegengesetzten Seiten von P_{Str} oder P_{S_2} und P_{S_3} auf entgegengesetzten Seiten P_{Str}, aber nicht beides.

Bei dieser Wahl der Axiome – die natürlich angelehnt sind an die obigen Axiome der mathematischen Theorie fällt mit Blick auf ihren didaktischen Nutzen Folgendes auf:

1. Die widerspruchsfreie Anlehnung an die Axiome der MT erlaubt es erst, in Beweisen oder Aufgaben Bleistiftkonstruktionen zu verwenden. Es verbieten sich aber Aussagen wie „Jede Gerade enthält unendliche viele Punkte“, die man mit geringem Aufwand aus den Axiomen der MT ableiten kann, mit Zeichnungen in Verbindung zu bringen, da jede Zeichnung nur aus endlich vielen physikalischen Entitäten besteht!

2. Vorsicht ist geboten, wenn man mathematische Ergebnisse über Messergebnisse verdeutlichen oder gar durch entdeckenden Unterricht zugänglich machen will, siehe hierzu den nächsten Abschnitt.

3. Es wurden mit Bedacht keine Axiome einer „P-Kongruenz“ ausgesprochen, da solche in der Papiergeometrie unnötig sind. Würde man innerhalb der P-Geometrie Kongruenzbeweise führen, müsste man den jeweiligen Beweis durch die obige uniforme Struktur ergänzen, was die Beweise unnötig verkomplizieren würde und über die Konvergenz der Unbestimmtheitsmengen dann doch wieder in den Beweis der MT führen würde, so dass also keine tiefere Erkenntnis entstünde.

3. 2 Unschärfemengen und ihr Einfluss auf die Ergebnissicherung im Unterricht

Neben den Relationen der Abbildungsprinzipien stellen die oben beschriebenen Unschärfemengen das zentrale Bindeglied in der Ludwig’schen Methodologie zwischen experimenteller Realität auf der einen und der idealen gedanklichen Realität der mathematischen Theorienwelt auf der anderen Seite dar. Sie mahnen zur Vorsicht bei der naiven Übertragung mathematischer Ergebnisse in die experimentelle Realität. Diese Mahnung gewinnt dadurch eine didaktische Bedeutung, dass man im Unterricht ständig (und durchaus auch mit Erfolg) diese Übertragung in Form von geometrischen Figuren, Bildern von Graphen, Durchführung von Würfelexperimenten etc. durchführt. In vielen Unterrichtsvorschlägen und auch im Unterricht gebräuchlichen Büchern sieht man im Rahmen des entdeckenden Unterrichts den Vorschlag beispielsweise Innenwinkel in gezeichneten Dreiecken auszumessen, ausgeschnittene Figuren zwecks Konvergenzuntersuchungen aufeinander zu legen und Ähnliches. Es kommt aber gerade in solchen Unterrichtssituationen immer wieder zu Erfahrungen, die eine vorsichtigere Herangehensweise notwendig erscheinen lassen. So kommt es im Unterricht immer wieder zu Situationen, in denen Schülerinnen und Schüler auch bei sauberen Konstruktionen Innenwinkelsummen ausmessen, die nicht genau 180° betragen. Gibt man diesen Ergebnissen den nötigen Raum, gerät man als Lehrkraft schnell in Erklärungsnot, die zur Verwirrung führen kann, die wiederum zur üblichen Mathematikfrustration beiträgt. Solche Schülerinnen und Schüler müssen nämlich mühsam davon überzeugt werden, dass ihre Konstruktion im Gegensatz zu denen der anderen fehlerhaft sind, was sie ja in Wirklichkeit nicht sind. Hier kann es hilfreich sein, die Ludwig'schen Unschärfemengen zumindest zu erwähnen und ihren Einfluss zu verdeutlichen. Um die Formel der Fehlerrechnung verwenden zu können, wird dieser Fehler im Unterricht als statistischer Fehler behandelt, wohlwissend, dass dabei ein Kategorienfehler begangen wird. Ludwig versteht seine Unschärfe nicht als statistische Fehler, sondern als prinzipielle Notwendigkeit, um die Mathematik auf die Wirklichkeit anzuwenden. Durch dieses Vorgehen sollte die Lehrkraft aber in der Lage sein, den Unterricht in der vorherigen Weise dennoch schülergerecht durchzuführen, um auf entdeckende Momente im Unterricht nicht zu verzichten. Entsprechend wird die Formel für die Messunsicherheit fehlerbehafteter Größen aus der Physik angewendet. Es wird sich damit ausdrücklich auf den Standpunkt gestellt, als seien Winkel und Längen mehrmals gemessen worden, auch wenn im Unterricht nur einmal gemessen wurde. Anschließend seien Mittelwerte gebildet worden und nun wird die Unsicherheit dieses Mittelwerts nach der folgenden Formel untersucht:

Es werde eine Größe $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ betrachtet, die von den Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ abhängig ist, deren Messwerte aufgenommen wurden. Die Unsicherheit in diesen Größen wird in der Fehlerrechnung nun in angemessener Weise angenommen und mit u_{x_i} bezeichnet. Die Unsicherheit in der Größe y ergibt sich dann aus der Formel:

$$u_y = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u_{x_i}\right)^2}$$

Es wird vorgeschlagen, in den Unsicherheiten der einzelnen Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Grenzen aus den Unschärfemengen zu verwenden.

Beispiel 1: *Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck*

Die obige Formel der Fehlerrechnung ergibt hier eine Unsicherheit der Innenwinkelsumme in der Größe:

$$u_y = \varepsilon \cdot \sqrt{3} \approx 1.7mm$$

Das mathematische Ergebnis *„Die Summenmaß der Innenwinkel im ebenen Dreieck beträgt 180°“* kann zur Überprüfung in die Papiergeometrie übertragen, so formuliert werden: *Schneiden sich drei gerade P-Strecken in drei fixierten Stellen, so ergibt die Summe aller Maße entstehender Innenwinkel des P-Dreiecks im Rahmen der Unbestimmtheit das Maß* $180^\circ \pm 1.7^\circ$.

Es ist, bedingt durch die Nutzung von Ergebnissen der Analysis, nicht möglich, solche Formeln im Mittelstufenunterricht abzuleiten, sie können nur als „Faustformeln“ Verwendung finden. Der Vorzug dieser Formeln ist jedoch die Übereinstimmung der Messergebnisse im Unterricht mit den mathematischen Ergebnissen.

Beispiel 2: *Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks*

Aus der Euklidischen Theorie kann leicht das folgende Ergebnis herleiten: *„Liegt der dritte Punkt C auf dem Halbkreis mit der Strecke AB als Durchmesser, so ist das Dreieck rechtwinklig, wobei sich der rechte Winkel in der Ecke C befindet.“*

Soll dieses Ergebnis nun durch eine Bleistiftskizze überprüft werden, so lautet die Formulierung:

„Konstruiert man zuerst mit dem Zirkel einen P-Kreis um eine fixierte Stelle und anschließend die P-Strecke durch die fixierte Stelle des Kreismittelpunkts und fixiert die beiden Schnittstellen der Kreislinie und der P-Strecke, so entsteht ein P-Dreieck, wenn man die dritte fixierte Stelle auf den P-Halbkreis zeichnet und mit den beiden anderen fixierten Stellen durch P-Strecken verbindet. Misst man nun den Winkel in der dritten fixierten Stelle auf der P-Halbkreislinie, so stellt man im Rahmen der Unbestimmtheit fest, dass dieser ein rechter Winkel ist.“

Führt man diese Konstruktion im Unterricht durch, so zeigen alle Ergebnisse zwischen 89° und 91° an, dass die Konstruktion der Schülerinnen und Schüler richtig sind.

Beispiel 3: *Überprüfung eines Strahlensatzes durch Messung*

Für den Fall einer Überprüfung eines Strahlensatzes durch Messung der entsprechenden Streckenlängenbeispielsweise in einer Figur wie in Abbildung 1

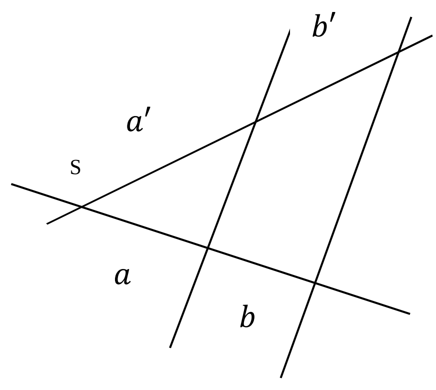

Abb. 1: Beispielfigur zur Überprüfung eines Strahlensatzes.

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a'}{a'+b'} \Leftrightarrow a = \frac{a'}{b'}b$$

erhält man aus der obigen Formel die folgende Unsicherheit:

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 + \left(\frac{b}{b'}\right)^2 + \left(\frac{a' \cdot b}{b'^2}\right)^2} \cdot 1mm$$

Die Strahlensätze können insbesondere dazu genutzt werden, um, wie es Courant und Robbins ausdrücken „die rationalen algebraischen Operationen – Multiplikation und Division bekannter Größen durch geometrische Konstruktionen auszuführen“ (Courant, 1962, S. 97), beispielsweise wie in der folgenden Abbildung 2.

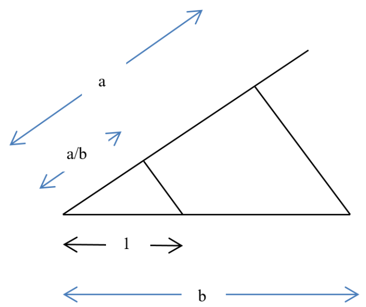

Abb. 1: Beispielhafte geometrische Darstellung zur Division zweier Zahlen.

Natürlich sollte auf eine derartige Nutzung der Möglichkeiten zur Verknüpfung von Geometrie und Arithmetik (gerade mit Blick auf die Erweiterung durch irrationale Zahlen) im Unterricht nicht verzichten werden. Eine Diskussion der Problematik „Mathematik und Realität“ erscheint aber angeraten.

Geradezu unverzichtbar wird diese Diskussion im Rahmen der Einführung von irrationalen Zahlen. Schließlich lassen sich diese über den Höhensatz in rechtwinkligen Dreiecken konstruieren:

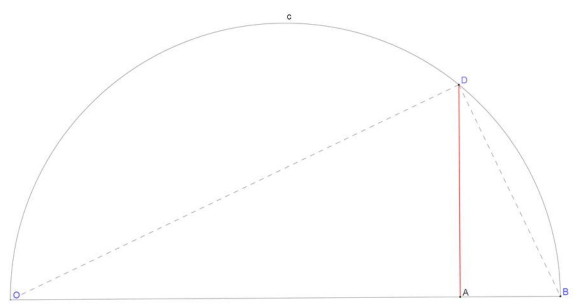

Abb. 2: Konstruktion von irrationalen Zahlen mit Hilfe des Höhensatzes.

Hat Strecke AB die Länge 1, so gilt nach dem Höhensatz:

$$|AD| = \sqrt{|OA|} \cdot 1$$

Würde man nun behaupten, in der obigen Figur eine irrationale Zahl als Länge der Strecke AD konstruiert zu haben, so wäre dies im Ludwig’schen Sinne prinzipiell – also nicht nur im Rahmen von Messfehlern – falsch, da sich mathematische Objekte in der Realität nicht darstellen lassen.

Dass man mit Bleistift konstruierte Figuren mathematisch nicht überlasten darf, kann man auch daran erkennen, dass es für Schülerinnen und Schüler kein Problem darstellt, einen konstruierten Kreis durch ein n-Eck in ein flächeninhaltsgleiches Polygon zu transformieren und sie das Problem der „Quadratur des Kreises“ auf diese Weise nicht als Problem wahrnehmen. Dass das den Griechen ebenfalls bekannt war, bezeugt die von Toeplitz beschriebene Antwort des Aristoteles auf die vom Sophisten Antiphon gegebene Lösung des Kreisquadraturproblems (Toeplitz, 1972, S. 8 f.).

Man kann diese Art der Ergebnissicherung mittels Unschärfemengen auch zu interessanten Diskussionen mit Schülerinnen und Schülern nutzen, um die Beweisbedürftigkeit mathematischer Aussagen an sich zu diskutieren. Im Hinblick auf die Frage nämlich, ob man die Fehlergrenze verkleinern kann und was dazu notwendig wäre. In diesem Zusammenhang lässt sich darüber diskutieren, wie denn beispielsweise ein ideales Dreieck aussehen müsste, dessen Innenwinkel ohne Fehler sicher den Summenwert 180° hätte – es wäre nämlich auf dem Papier nicht mehr vorhanden. Solche Diskussionen hat einer der Verfasser im Unterricht schon geführt und die Erfahrung zeigt, dass Schülerinnen und Schüler das Problem durchaus verstehen und auch in der Lage sind, eine Ahnung davon zu erhalten, was ein ideales gedankliches Objekt ist.

4. Fazit und Ausblick

4.1 Zur didaktischen Reflexion der Papiergeometrie

Das Unterrichten von Geometrie in der vorgestellten Weise wirkt, wenn man Geometrie wie eine physikalische Theorie darstellt, sicherlich befremdlich. Der in diesem Artikel vorgestellte Ansatz liefert aber sicherlich interessante Beiträge, die vor allem als „Meta-Theorie“ für Lehrende der Mathematik angesehen werden können. Aus Sicht der Autoren liegt der große Vorteil vor allem in dem Explizit-Machen der Unterschiede zwischen einer empirischen Theorie und einer mathematischen und in der Thematisierung der Herausforderungen beim Anwenden von

Mathematik auf Realität. Schülerinnen und Schüler würden dabei „dort abgeholt werden, wo sie stehen", bei rein empirischen Begriffen, wie gezeichnete Punkte, Strecken etc. Jedoch kann im Laufe des Geometrieunterrichts die Einführung in die Mathematische Theorie gelingen, indem man die Grenzen der Papiergeometrie aufzeigt und die Unterschiede zur formalen Mathematik explizit diskutiert.

4.2 Potential für die Lehrerbildung

Für Studierende des Faches Mathematik für das gymnasiale Lehramt sind Diskussionen dieser Art besonders relevant, da sie die unterschiedlichen „Welten" der anwendungsorientierten Schulmathematik und der formalen Hochschulmathematik in ein fruchtbares Verhältnis bringen sollten, ohne ihr Studium im Sinne einer doppelten Diskontinuität nach Felix Klein (1924) zu erfahren:

> Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat. (Klein, 1924, S. 1)

Die „Andersartigkeit" von Schul- und Hochschulmathematik kann u. a. am empirischen Charakter ausgemacht werden (Stoffels, 2019), also im Verhältnis zwischen Mathematik und Realität. Die Beschreibung der Schulgeometrie mit der Methodologie Ludwigs stellt aus Sicht der Autoren einen wertvollen Lehrinhalt in der Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts dar. Die Erfahrungen, die beide Autoren mit einem Seminar zum Thema „Mathematik und Realität" gemacht haben, zeigen, dass Studierende diesen Ansatz als wertvolle Ergänzung zu den „klassischen" Modellierungskonzepten der Mathematikdidaktik bei diesem Thema einschätzen. So kann in Anlehnung an die Theorie Ludwigs der Übergang von „Rest der Welt" zur Mathematik expliziert werden. Und vor allem die Übersetzung bzw. Rückinterpretation von dem einen in den anderen Bereich kann mithilfe dieses Ansatzes konkretisiert werden.

Außerdem kann dieser theoretische Rahmen Sichtweisen auf den allgemeinen Unterschied zwischen Schul- und Hochschulmathematik eröffnen. Das explizit machen dieser Unterschiede kann bei der Bewältigung der „Übergangsproblematik" von Schule zur Hochschule wertvolle Beiträge leisten (Witzke et al., 2016). Studierende, die schon seit einigen Semestern Hochschulmathematik erfahren haben, haben ein Gefühl dafür, dass formale Mathematik und Mathematik an empirischen Objekten „anders" sind. Das Seminar hat ihnen geholfen, diese Unterschiede zu thematisieren und über die Herausforderungen beim Anwenden von formaler Mathematik auf Realität nachzudenken. Die Ludwigsche Methodologie sensibilisiert für Fragen an der Schnittstelle zwischen formaler Mathematik und ihrer Anwendung in der Realität, die so in der Regel in den klassischen Modellierungskreisläufen nicht thematisiert werden.

4.3 Kooperationspotential mit der Physik(didaktik)

Der explizite Bezug zur Physik legt eine interdisziplinäre Kollaboration zwischen Mathematikdidaktikern und Physikdidaktikern nahe. Damit könnte ein Beitrag zur Beschreibung von epistemologischen Parallelen zwischen Schulmathematik und Physik geleistet werden, die bereits in einigen didaktischen Publikationen thematisiert wurden (z. B. Krause, 2019). Generell liefert die Methodologie Ludwigs einen interessanten Beitrag in der Beschreibung der Rolle der Mathematik in der Physik. Diese wurde in der physikdidaktischen Forschung in der jüngeren Vergangenheit in einigen Arbeiten beforscht. Exemplarisch seien die Dissertationen von Olaf Uhden (2012) und Olaf Krey (2012) genannt. Allgemein findet der Zusammenhang von Mathematik und Physik in den entsprechenden Fachdidaktiken reges Interesse. Dazu kann auf den Überblicksartikel von Galili (2018) verwiesen werden oder auch auf Themenhefte in Zeitschriften beider Fachdidaktiken (aus physikdidaktischer Perspektive Pospiech und Karam (2016), aus mathematikdidaktischer Perspektive Witzke und Krause (2017)). Die in diesem Artikel vertretene Hypothese, dass Schulmathematik epistemologisch mit der theoretischen Physik verglichen werden kann, ist sicherlich diskutabel, aber gerade eine solche Diskussion eröffnet Möglichkeiten über Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Disziplinen nachzudenken. Ein solcher epistemologische Vergleich ist ein für beide Fachdidaktiken relevantes Forschungsgebiet (Krause et al., 2020; Dilling et al., 2019).

Danksagung

Wir danken den gutachtenden Personen für die hilfreichen und konstruktiven Anmerkungen und Kommentare.

Literatur

Balzer, W. & Moulines, C. U., (Hrsg.) (1996). *Structuralist theory of science, Focal Issues, New Results*, Berlin: de Gruyter.

Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.) (2013). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0

Burscheid, H. J. & Struve, H. (2018). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-23090-6

Courant, R. & Robbings, H. (1962). *Was ist Mathematik?* Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer –Verlag.

de Saussure, F. (1967*). Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft*. Berlin: Walter de Gruyter.

Dilling, F.; Holten, K.; Krause, E. (2019). Explikation relevanter Inhalte für den interdisziplinären Austausch zwischen Mathematik- und Physikdidaktik. *mathematica didactica*, 42, 1–18.

Ebbinghaus, H.-D., Flum, J. & Thomas, W. (2018). *Einführung in die mathematische Logik* (6. Aufl. 2018). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-58029-5

Einstein, A. (1921). Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. In C. Seelig (Hrsg., 1998), *Mein Weltbild* (S. 132-141). Frankfurt a. M.: Ullstein.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 1/2, 3–8.

Galili, I. (2018). Physics and Mathematics as Interwoven Disciplines. In *Science Education*, 27, 7–37.

Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica *und verwandter Systeme I*. In *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 38, 173–198.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 11–37). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–24). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hempel, C. G. (1945). Geometry and Empirical Science. In *American Mathematical Monthly.* 52, 7-17.

Krause, E., Dilling, F., Kraus, S., Chi, N., Chat, T. & Bien, N. (2020): Relevant Content for a Scientific Collaboration in Mathematics and Physics Education Research – A Comparative Content Analysis of Handbooks and Conference Proceedings in Germany and Vietnam. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(4). https://doi.org/10.29333/ejmste/114097

Krause, E. (2019). Mathematics – a „quasi-natural science“at school? In E. McLoughlin, P. Van Kampen (Hrsg.): *Concepts, Strategies and Models to Enhance Physics Teaching and Learning* (S. 49–58). *Basel: Springer Nature Switzerland*.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*. Bd. 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Krey, O. (2012): *Zur Rolle der Mathematik in der Physik. Wissenschaftstheoretische Aspekte und Vorstellungen Physiklernender*. Berlin: Logos-Verl. (Studien zum Physik- und Chemielernen, 130).

Leiss, D. & Blum, W. (2010). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 33–50). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lévi-Strauss, C. (2012). *Strukturale Anthropologie* (H. Naumann, Trans.) (9. Aufl.). Vol. 226. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Ludwig, G. & Thurler, G. (2006). *A New Foundation of Physical Theories*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30833-1

Ludwig, G. (1990). *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Ludwig, G. (1964). Versuch einer axiomatischen Grundlegung der Quantenmechanik und allgemeinerer physikalischer Theorien. *Zeitschrift für Physik*, 181(3), 233–260. https://doi.org/10.1007/BF01418533

Ludwig, G. (1979). *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik*, Band 4, Makrosysteme, Physik und Mensch. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-12069-8

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (S. 1–32). New York: Springer.

Pospiech, G. & Karam, R. (2016). Mathematik im Physikunterricht. *Naturwissenschaften im Unterricht Physik*. 153/154.

Rellensmann, J. (2019). Mathematisches Modellieren. In J. Rellensmann (Hrsg.), *Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik. Selbst erstellte Skizzen beim mathematischen Modellieren* (pp. 5–30). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24917-5_2

Scheibe, E. (1997). *Die Reduktion physikalischer Theorien*, Teil I, Grundlagen und elementare Theorie, Berlin: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Sneed, J. D. (1979). *The Logical Structure of Mathematical Physics* (Second Edition, Revised.). A Pallas Paperback: Vol. 35. Dordrecht: Springer.

Stegmüller, W. (1979): *The Structuralist View of Theories. A Possible Analogue of the Bourbaki Programme in Physical Science*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Stoffels, G. (2019). *(Re-)konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung. Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule-Hochschule*. Dissertation. Wiesbaden: Springer (MINTUS: Beiträge zur mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Bildung).

Struve, H., (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim u. a.: BI-Wiss.-Verlag.

Tapp, C. (2013). *An den Grenzen des Endlichen: Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus. Mathematik im Kontext*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Toeplitz, O. & Köthe, G. (1949). Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung: Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung Nach der Genetischen Methode. Erster Band. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, In *Einzeldarstellungen mit Besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete*: Vol. 56. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-49782-7

Uhden, O. (2012). *Mathematisches Denken im Physikunterricht – Theorieentwicklung und Problemanalyse*. Dissertation an der Technischen Universität Dresden.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets and Zeitlinger.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *DMV Mitteilungen.* (2), 35–41.

Witzke, I. & Krause, E. (2017). Mathematikunterricht im Kontext physikalischer Anwendungen – Grundlegungen und Konzepte zu fächerverbindendem Unterricht. *Der Mathematikunterricht*. Jg. 63, Heft 5-2017.

Witzke, I., Struve, H., Clark, K. & Stoffels, G. (2016). ÜberPro – A seminar constructed to confront the transition problem from school to university mathematics, based on epistemological and historical ideas of mathematics. *MENON – Journal of Educational Research, Special Issue: The Use of History of Mathematics in Mathematics Education*, 66–93.

Anschrift der Verfasser

Eduard Krause
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Herrengarten 2
57072 Siegen
krause@mathematik.uni-siegen.de

Jochen Geppert
Universität Siegen
Didaktik der Mathematik
Herrengarten 2
57072 Siegen
geppert@mathematik.uni-siegen.de