

# Kognitives Schätzen aus Sicht der Mathematikdidaktik: Schätzen von visuell erfassbaren Größen und dazu erforderliche Fähigkeiten

DANA FARINA WEIHER & SILKE RUWISCH, LÜNEBURG

**Zusammenfassung:** Sowohl die Psychologie als auch die Mathematikdidaktik befassen sich mit dem Schätzen. In diesem Beitrag wird ein theoretisches Modell zur Diskussion gestellt, in welchem die Fähigkeiten, die zum Schätzen von Größen erforderlich sind, aus mathematikdidaktischer Sicht dargestellt werden. Diese sind aus Untersuchungen der Psychologie zum kognitiven Schätzen und mathematikdidaktischen Erkenntnissen zu Schätzstrategien abgeleitet. Sie umfassen exekutive Funktionen, Wissen über den Messprozess, Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen, die Fähigkeit zu vergleichen und zur räumlichen Vorstellung sowie verschiedene Gruppen allgemeinen (mathematischen) Wissens und grundlegender Fähigkeiten.

**Abstract:** Mathematics education as well as psychology is concerned with estimation. This paper presents a theoretical model which contains those abilities, which are (from a didactical perspective) required for measurement estimations. These abilities are deducted from psychological research about cognitive estimation and from research in mathematics education about estimation-strategies. The abilities involve executive functions, knowledge about measuring, benchmarks, and, last but not least, different groups of general (mathematical) knowledge and basic abilities.

## 1. Einleitung

Wie oft am Tag stellen wir Schätzungen an und merken es gar nicht? Tatsächlich stellen wir den ganzen Tag, das ganze Leben lang andauernd Schätzungen an. [...] Wir schätzen und schätzen und schätzen, dann fällen wir eine Entscheidung. (Paenza, 2012, S. 336 f.)

Dieses Zitat verdeutlicht zum einen, dass Schätzen eine Alltagskompetenz ist, die als wesentlich für die Bewältigung vieler Situationen angesehen werden kann. Zum anderen ist es ein Prozess, der unermüdlich durchgeführt wird – aber dabei nicht immer bewusst verläuft und teilweise sogar dem Bewusstsein nicht zugänglich zu sein scheint. Es ist allerdings noch offen, wie eine Entscheidung für ein Schätzergebnis gefällt wird.

Aus Sicht der Neuro- und Kognitionspsychologie ist kognitives Schätzen ein

Prozess der Antwortgenerierung bei Nichtverfügbarkeit der exakten Lösung mit Hilfe des semantischen Wissens und der Anwendung von (Vergleichs-) Stra-

tegien. (Brand, Fujiwara, Kalbe, Kessler & Markowitsch, 2002, S. 282)

Aus Sicht der Mathematikdidaktik ist Schätzen ein „kompliziertes Zusammenspiel von Wahrnehmen, Erinnern, Inbeziehungsetzen, Runden und Rechnen“ (Winter, 2003, S. 19).

Die Neuro- und Kognitionspsychologie konzentriert sich in ihrer Forschung insbesondere auf die am Schätzprozess beteiligten kognitiven Prozesse und bezeichnet das Schätzen daher abgrenzend als *kognitives Schätzen*. Die Erforschung der beteiligten kognitiven Prozesse dient der Nutzung des kognitiven Schätzens als Mittel zur Feststellung von Frontalhirndefiziten (Peretti Wagner, MacPherson, Parente & Trentini, 2011, S. 203). In der Mathematikdidaktik wird das Schätzen vor allem inhaltlich ausdifferenziert. So wird zwischen dem Schätzen der Anzahl der Elemente einer Menge, dem Schätzen des Ergebnisses einer Rechenaufgabe (Überschlagen) und dem Schätzen einer Größe eines Objekts oder Vorgangs unterschieden (O’Daffer, 1979; Sowder, 1992, S. 371). Es wird davon ausgegangen, dass bei allen drei Schätzvorgängen andere Fähigkeiten und Strategien zugrunde liegen, auch wenn eine zumindest teilweise Überschneidung nicht ausgeschlossen werden kann (Sowder, 1992, S. 371). Insbesondere das Schätzen von Anzahlen und das Schätzen von Größen erfordern ähnliche Fähigkeiten und werden daher in Studien häufig zusammengefasst (Hogan & Brezinski, 2003, S. 260; Siegel, Goldsmith & Madsen, 1982, S. 214; Sowder, 1992, S. 371). In diesem Beitrag sprechen wir immer dann vom *kognitiven Schätzen*, wenn explizit auf die Neuro- und Kognitionspsychologie Bezug genommen wird. Dagegen sprechen wir vom *Schätzen*, wenn wir das Schätzen von Größen aus mathematikdidaktischer Sicht beleuchten.

Aus deren Sicht können beim Schätzen von Größen noch nicht einmal alle Größenarten<sup>1</sup> gemeinsam betrachtet werden, da zwischen ihnen teilweise deutliche Unterschiede bestehen. So sind Längen, Flächeninhalte und Volumina visuell erfassbar, Gewichte jedoch nicht. Geschwindigkeiten können nur begrenzt visuell wahrgenommen werden, nämlich durch das Verhältnis von Strecke und Zeit. Geld ist keine physikalische Größe, sondern eine Zählgröße (Franke & Ruwisch, 2010, S. 182). Zeitspannen können nur durch Handlungen oder Vorgänge sichtbar gemacht werden und sind außerdem flüchtig (Franke & Ruwisch, 2010, S. 217).

Dennoch haben insbesondere die Größenarten Längen, Flächeninhalte und Volumina Gemeinsamkeiten. Alle drei beruhen auf der Basisgröße Länge. Grund für die Auswahl dieser Größenarten für eine gemeinsame Betrachtung in diesem Beitrag ist darüber hinaus die Tatsache, dass

für die Qualität der Größenvorstellungen zunächst die Art, in der die Schüler die Repräsentanten von Größen wahrnehmen, von besonderer Bedeutung ist. Bezüglich der Länge, des Flächeninhalts und des Volumens ist eine visuelle Wahrnehmung möglich. (Frenzel & Grund, 1991b, S. 18)

Hildreth (1983, S. 50) nimmt an, dass die Fähigkeiten zum Schätzen für die Größenarten Längen und Flächeninhalte ähnlich sind. Griesel (1996, S. 17) setzt für alle drei Größenarten ähnliche Grundvorstellungen voraus. Nührenböcker (2004, S. 95) bezeichnet das (Mess-)Verständnis von Längen als Voraussetzung für das (Mess-)Verständnis von Flächeninhalten und Volumina. Daher scheint eine gemeinsame Betrachtung der Fähigkeiten, die für das Schätzen dieser drei Größen erforderlich sind, sinnvoll zu sein.

Die Definitionen zum Schätzen aus beiden Wissenschaftsbereichen zeigen bereits die Komplexität des Schätzprozesses und die Vielfältigkeit an Anforderungen, die an die schätzende Person gestellt werden. Die Beschreibung des Schätzprozesses und der dahinterstehenden Fähigkeiten weist jedoch trotz der alltäglichen Bedeutung und der Präsenz in verschiedenen Disziplinen Lücken auf:

Further research is needed in order to explore exactly which cognitive abilities are requested when someone is trying to make an estimation. (Peretti Wagner et al., 2011, S. 209)

Diesem Forschungsdefizit soll die Entwicklung eines Modells zum Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina in diesem Beitrag entgegenwirken. Dazu werden die Erkenntnisse zum kognitiven Schätzen aus der Psychologie aus mathematikdidaktischer Sicht für das Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina interpretiert. Es werden aus der Literatur beider Disziplinen Fähigkeiten, die dem Schätzen dieser Größen zugrunde liegen, abgeleitet und strukturiert bezüglich ihrer Abhängigkeiten dargestellt.

Kapitel 2 stellt den Diskussions- und Forschungsstand zum Schätzen dieser Größen aus der Mathematikdidaktik dar. Zunächst findet eine Begriffsklärung, auch durch Abgrenzung von anderen Begriffen, statt. Anschließend wird herausgearbeitet, warum im Weiteren von Stützpunkt- statt Größenvorstellungen gesprochen wird, bevor schließlich im Hauptabschnitt Schätzstrategien als Grundlage für die Erläuterung der am Schätzprozess beteiligten

Fähigkeiten genauer thematisiert und systematisiert werden.

Kapitel 3 stellt zentrale Komponenten des kognitiven Schätzprozesses aus neuro- und kognitionspsychologischer Sicht vor.

In Kapitel 4 und 5 werden beide Sichtweisen zu einem theoretischen Modell des Schätzens zusammengeführt. Leitend in der Modellentwicklung und deren Präsentation in diesem Beitrag ist dabei die mathematikdidaktische Sicht, so dass eine diesbezügliche Interpretation der neuro- und kognitionspsychologischen Erkenntnisse stattfindet. Kapitel 4 liefert dementsprechend die Gesamtrahmung – das Schätzen im weiteren Sinne –, bevor sich in Kapitel 5 differenzierte Ausführungen zum Schätzen im engeren Sinne finden.

## 2. Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina

Im Folgenden wird der Begriff des Schätzens von Größen expliziert. Diese Klärung erfolgt auch durch Abgrenzung zum Messen auf der einen und zum Raten auf der anderen Seite.

Das Schätzen von Größen kann als

das Ermitteln einer ungefähren Größenangabe durch gedankliches Vergleichen mit eingepägten Repräsentanten als Stützpunkten (Franke & Ruwisch, 2010, S. 248)

verstanden werden. Wesentlich für das Schätzen ist der gedankliche Vergleich mit Stützpunkten, da beim Schätzen keine konkreten Hilfsmittel genutzt werden:

Estimation of measurements is the use of units of measure in a strictly mental way, without the aid of measurement tools. (Bright, 1976, S. 88)

Beim Schätzen können qualitative und quantitative Schätzanforderungen unterschieden werden. Während beim quantitativen Schätzen eine Zahl oder Größenangabe als Antwort gegeben wird, wird beim qualitativen Schätzen der Vergleich zweier Objekte hinsichtlich ihrer Größenausprägung erwartet (Blankenagel, 1983, S. 319; Goldstein et al., 1996, S. 37; Ruwisch, 2014, S. 4 f.).

Darüber hinaus können zwei Arten quantitativen Schätzens unterschieden werden: Grundständige Schätzaufgaben erfordern die Nennung einer Anzahl oder einer Größenangabe, welche meist durch eine Strategie wie das gedankliche Vergleichen ermittelt werden kann (zu den Strategien, die beim Schätzen angewendet werden, vgl. Abschn. 2.2). Eingebettete Schätzaufgaben, wie etwa Fermi-Aufgaben, erfordern die Koordination verschiedener Teilschritte, die weitere Überlegungen wie die Erfahrungen zur

Sachsituation oder die Beziehung zwischen Daten mit einschließen (Franke & Ruwisch, 2010, S. 251 ff.).

Frenzel und Grund (1991b, S. 24) unterscheiden beim quantitativen Schätzen das echte Schätzen und das mittelbare Schätzen. Während beim echten Schätzen die „Größenangabe ausschließlich aufgrund von bestimmten Vorstellungen und Erfahrungen des Subjekts“ (Frenzel & Grund, 1991b, S. 23) erfolgt, werden beim mittelbaren Schätzen andere Größen geschätzt, durch die rechnerisch die gesuchte Größenangabe ermittelt werden kann.

Dem mentalen Charakter des Schätzens steht der konkrete Charakter des Messens gegenüber. Peter-Koop und Nührenbörger (2011, S. 92) fassen das Messen wie folgt:

Es muss eine Einheit gefunden werden. Diese muss wiederholt benutzt und dabei gezählt werden, wenn das zu Messende größer ist als die Maßeinheit. Die Einheit muss systematisch untergliedert werden, wenn keine Maßeinheit aus den natürlichen Zahlen das zu Messende vollständig erfasst.

Aufgrund dieser Beschreibung bleibt lediglich unklar, *wie* mit der Einheit operiert wird. Hierzu stellt Griesel (1996, S. 17) beispielhaft für Längen fest, dass die

Vorstellung von hintereinandergelegten Strecken, mit denen die Strecke  $S_1$  ausgelegt wird [...], charakteristisch für das Meßverfahren

ist. Das Aneinanderlegen der Einheiten muss geschehen, ohne dass es Lücken und Überschneidungen gibt (vgl. Abschn. 5.1.4). Dasselbe beschreibt Battista (2003, S. 122) für das Messen von Flächeninhalten und Volumina:

To measure area and volume in standard measurement systems, we determine the number of unit squares or cubes in the region we are measuring.

Die Anordnung der Einheiten muss auch ohne Lücken oder Überschneidungen vorgenommen werden.

Durch die Betrachtung der Messidee als Auslegen mit Einheiten wird deutlich, dass es ein zu messendes Objekt gibt und eines, mit dem gemessen wird (Frenzel & Grund, 1991a, S. 12). Zum Messen können verschiedene Hilfsmittel genutzt werden, die auf Einheiten beruhen. Hier kann zwischen Hilfsmitteln mit standardisierten und solchen mit nichtstandardisierten Einheiten unterschieden werden. Je nach Messgerät (bzw. nach Einheit) variiert der Grad der Genauigkeit der Messung, wobei zu beachten ist, dass auch mit standardisierten Messgeräten keine exakte Bestimmung der Größe möglich ist (Bright, 1976, S. 89; Frenzel & Grund, 1991a, S. 12; Ruwisch, 2014, S. 4). Demnach macht beim Ermitteln einer Größe allein das konkrete Nutzen von Hilfs-

mitteln und deren Zweck als Einheit (unabhängig davon, ob es sich um standardisierte oder nichtstandardisierte Einheiten handelt) dieses zu einem Messprozess.

Diese unumstrittene Abgrenzung von Schätzen und Messen ist in Bezug auf die verwendeten Hilfsmittel nicht immer eindeutig. So sprechen manche Autorinnen und Autoren auch dann vom Schätzen, wenn mit Körpermaßen die Länge oder der Flächeninhalt bestimmt wird, da zum einen die verwendete Einheit geschätzt werden müsse, zum anderen die Größe nur „ungefähr“ bestimmt werde (Huang, 2015, S. 75). Nührenbörger (2004, S. 96) hingegen fasst Körpermaße als für Kinder intuitiv nutzbare sowie historische Messgeräte auf. Verbunden mit der Tatsache, dass auch das Messen keine exakte Größenangabe ermöglicht, zeigt dies, dass das Verwenden von Körpermaßen nicht per se als Schätzprozess aufgefasst werden kann. An dieser Stelle sei erneut auf Bright (1976, S. 88) verwiesen, der, wie oben beschrieben, das strikte mentale Vorgehen als wesentlichen Bestandteil des Schätzens beschreibt. Unabhängig von den verwendeten Hilfsmitteln handelt es sich demzufolge bei konkreten Handlungen immer um einen Mess- und keinen Schätzprozess.

Schätzen kann durch Heraushebung der mental genutzten Repräsentanten ebenfalls vom Raten abgegrenzt werden. Es bedarf mentaler Vergleichsprozesse, ansonsten kann nicht von einem Schätzprozess gesprochen werden:

Estimating is guessing, but the guessing must be educated. Wild guessing is not true estimating. (Bright, 1976, S. 89)

Das englische Wort *guess* kann sowohl mit *raten* als auch mit *schätzen* übersetzt werden. Dies könnte die Möglichkeit der synonymen Verwendung suggerieren. Dass dies nicht der Fall ist, hat Bright mit der Beschreibung *wild guessing* für *raten* ausgedrückt. Auch Winter (2003, S. 18) verweist auf diesen Unterschied zwischen Schätzen und Raten:

Um die Aufgabe (eine Schätzaufgabe, D.F.W. & S.R.) zu lösen, muß der Schüler auf Vorerfahrungen zurückgreifen, also sein Langzeitgedächtnis bemühen. Wenn dort nichts Passendes ist, kann nur noch geschwiegen oder geraten werden. Schätzen ist jedenfalls kein blindes Raten.

Die vorangegangenen Darlegungen führen zu folgendem Verständnis des Schätzens, welches dem in diesem Beitrag entwickelten Modell zugrunde liegt:

Schätzen ist ein mentaler Prozess, in dem die quantitative Ausprägung einer Größe eines Objekts unter Anwendung mentaler Vergleichsprozesse mit anderen Objekten ermittelt wird, ohne dass konkrete Hilfsmittel verwendet werden.

## 2.1 Vorstellen von Größen und Stützpunkten

Eine Größe ist zunächst eine Eigenschaft ihres Trägers (Griesel, 1996, S. 15), die es beim Schätzen (oder Messen) quantitativ zu bestimmen gilt. Die quantitative Beschreibung einer Größe erfolgt durch die Größenangabe oder den Größenwert. Dabei werden eine Maßzahl und eine Maßeinheit verwendet, welche multiplikativ zusammenhängen (Frenzel & Grund 1991a, S. 11). Die Maßzahl und die Maßeinheit bedingen einander, so ergibt sich bei Verkleinerung der Maßeinheit eine größere Maßzahl und umgekehrt (Franke & Ruwisch, 2010, S. 196).

Dem Träger kommt die Größe in genau einer Ausprägung zu, d. h. er ist Repräsentant für genau diese Größenausprägung, die mit genau dieser Größenangabe beschrieben werden kann. Im Umkehrschluss sind Größen und ihre Ausprägungen nicht ohne Träger vorstellbar:

Bezüglich der Größen gilt grundsätzlich, dass man sich nur Träger und Konfigurationen von Trägern vorstellen kann, nicht jedoch die Größenwerte. (Gode, 2001, S. 16)

Dennoch ist der Begriff *Größenvorstellungen* in der Literatur ein gängiger Begriff. Unter Größenvorstellungen verstehen Frenzel und Grund (1991b, S. 16) neben dem Erkennen und Unterscheiden verschiedener Größenarten die Kenntnis von Repräsentanten unterschiedlicher (spezieller) Größen, das Beherrschen der Umrechnung von Größenangaben sowie Fähigkeiten im Messen, Schätzen und Überschlagen. Begleitend werden Zahlvorstellungen aufgeführt (vgl. Abb. 1).

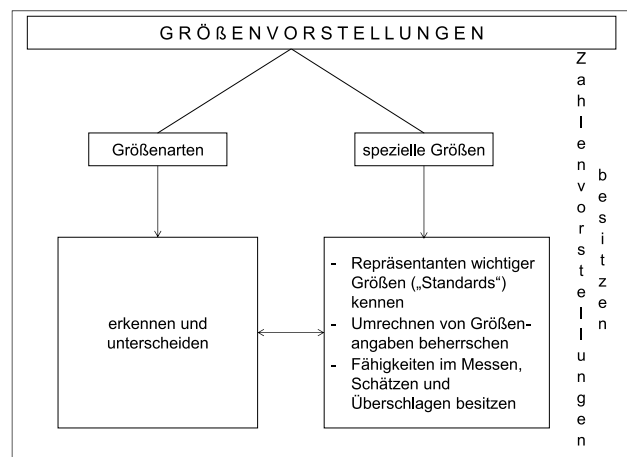


Abb. 1: Größenvorstellungen (Frenzel & Grund 1991b, S. 16)

Auch andere Autorinnen und Autoren weisen auf die Verbindung zwischen dem Schätzen von Größen und Zahlvorstellungen hin (Hope, 1989, S. 15; Kuwahara Lang, 2001, S. 463; Pike & Forrester, 1997, S. 493; Sowder, 1992, S. 371).

Franke und Ruwisch (2010, S. 235) nennen drei Aspekte, die Größenvorstellungen untergeordnet sind:

- zu Größenangaben passende Repräsentanten kennen,
- zu alltäglichen Repräsentanten die passende Größenangabe kennen,
- Stützpunktwissen beim Schätzen, Problemlösen und im Alltag flexibel nutzen.

Alle bezüglich Größenvorstellungen genannten Aspekte haben gemeinsam, dass sie sich auf das Wissen über die Größe von Objekten sowie das Nutzen dieses Wissens beziehen. Im Unterschied zum Konzept Größenvorstellungen von Frenzel und Grund (1991b) wird hier nur das Nutzen von Stützpunktwissen den Größenvorstellungen untergeordnet, während Frenzel und Grund den Mess-, Schätz- und Überschlagsprozess als Ganzes als Teil von Größenvorstellungen verstehen. Frenzel und Grund (1991b, S. 17 f.) erklären jedoch darüber hinaus:

Vorstellungen von Größen zu erzeugen bedeutet, im Bewusstsein der Schüler adäquate Abbilder von Größen entstehen zu lassen, dafür zu sorgen, daß diese aufbewahrt werden und je nach Bedarf immer wieder reproduziert und gedanklich weiterverarbeitet werden.

Diese Abbilder können als Träger einer Größe, deren Ausprägung bekannt ist, verstanden werden. Solche Objekte sind als *Stützpunkte* zu bezeichnen und als „die Bausteine von Größenvorstellungen“ (Franke & Ruwisch, 2010, S. 235) zu verstehen.

Es ist demzufolge nicht ausreichend, lediglich Wissen über die Größe von Objekten zu besitzen. Vielmehr muss zu diesem Wissen auch ein mentales Bild vorhanden sein, um das Wissen über die Größe des Objekts und damit das Objekt beim Schätzen als Stützpunkt nutzen zu können. Joram (2003, S. 65 f.) beschreibt drei Stufen des Umgehens mit Stützpunkten. Zunächst sind Stützpunkte nur als konkrete Einheiten nutzbar, erst in einer zweiten Stufe sind sie als mentale Bilder repräsentiert:

At the second level, [...] benchmarks are represented as visual images: they can then serve as reference points when estimating.

Die dritte Stufe beschreibt die Fähigkeit, verschiedene Größenangaben an einem Stützpunkt sichtbar zu machen. So kann ein Stützpunkt, der 50 cm lang ist, auch als Stützpunkt für die Größenangabe 0,5 m genutzt werden (Joram, 2003, S. 66).

Der von Franke und Ruwisch (2010, S. 237) genutzte Begriff *Stützpunktwissen* bezieht sich auf die Kenntnis der quantitativen Größenausprägung eines Objekts. Zu unterscheiden ist in diesem Zusammenhang zwischen den Begriffen *Stützpunktwissen* und *Stützpunktvorstellungen*. Für die Größenart Gewicht nimmt Reuter (2011, S. 287) diese Unterscheidung wie folgt vor:

Viele Kinder haben einzelnes Stützpunktwissen, bei dem es sich jedoch um rein theoretisches Wissen handelt, das nicht mit einer Vorstellung über das wahrnehmbare Gewicht verknüpft ist. [...] Beim Konzept Stützpunktvorstellungen handelt es sich um ein Konzept, das sich offenbar erst mit wachsendem Umgang mit Gewichten dauerhaft innerhalb des Gewichtskonzepts aufbaut, weil dafür Stützpunktwissen mit erfahrenerem wahrgenommenen Gewicht vernetzt werden muss, um sich zu Vorstellungen entwickeln zu können, auf die man zurückgreifen kann.

Bei Stützpunktwissen handelt es sich demnach um das Wissen über die Größenangabe eines Objekts, während es sich bei Stützpunktvorstellungen im Falle von visuell wahrnehmbaren Größen um ein mentales Bild der quantitativen Ausprägung handelt (zu mentalen Bildern vgl. Abschn. 3.1).

Grund unterscheidet zudem zwischen *mittelbaren* und *unmittelbaren Größenvorstellungen*. Der Unterschied liegt dabei in der Fassbarkeit und Darstellbarkeit der Größenvorstellungen: Während unmittelbare Größenvorstellungen durch „materielle Handlungen wie zeigen, umfahren, zeichnen, ... wiedergegeben werden können“ (Grund, 1992, S. 42), ist das bei mittelbaren Größenvorstellungen nicht möglich. Hier muss auf sprachliche Beschreibungen mit Bezug zu anderen Größen oder auf einen Vergleich mit anderen Repräsentanten aus der Umwelt zurückgegriffen werden (Grund, 1992, S. 42 f.).

Im Folgenden wird statt des Wortes *Größenvorstellungen* das Wort *Stützpunktvorstellungen* verwendet. Dies geschieht aus zwei Gründen: Zum einen soll in besonderer Weise deutlich bleiben, dass Größen nur als Eigenschaft ihres Trägers vorstellbar sind und mentale Abbilder von Größen demnach immer mentale Bilder von Objekten sind. Zum anderen umfasst das Konzept von Größenvorstellungen, wie es in der Literatur beschrieben worden ist, nicht nur das Vorstellen von Repräsentanten von Größen, sondern darüber hinausgehende Kenntnisse wie das Wissen über die Größenangabe dieser Stützpunkte (im Folgenden als Stützpunktwissen bezeichnet) sowie die Fähigkeit, mit Größenangaben zu rechnen.

## 2.2 Der Einsatz von Stützpunkten: Strategien zum Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina

Um ohne konkrete Handlungen mit Körpermaßen oder anderen nichtstandardisierten Hilfsmitteln, ohne standardisierte Messgeräte und ohne zu raten zu einem vernünftigen und angemessenen Schätzwert für eine Größe eines Objekts zu kommen, ist die Anwendung von Schätzstrategien erforderlich. In der Literatur werden die Schätzstrategien hauptsächlich für das Schätzen von Längen beschrieben

(Heid, 2017, S. 121 ff.; siehe auch Friebe, 1967, S. 479; Hildreth, 1983, S. 50; Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998, S. 415; Siegel et al., 1982, S. 226 f.), einige Autorinnen und Autoren nennen ebenfalls Strategien für das Schätzen von Volumina (Heid, 2017, S. 121 ff.) und Flächeninhalten (Hildreth, 1983, S. 51). Viele Strategien lassen sich auf die jeweils anderen Größenarten übertragen, auch wenn hierzu eine empirische Überprüfung fehlt (vgl. Abb. 2).

Aufgrund der Literaturlage lassen sich vier Kategorien von Schätzstrategien unterscheiden, die in den folgenden Abschnitten detailliert erklärt werden. Abb. 2 bietet eine Übersicht über die Kategorien (unterschiedliche Grautöne), die jeweiligen Strategien und die Größenarten, in denen sie angewendet werden können.

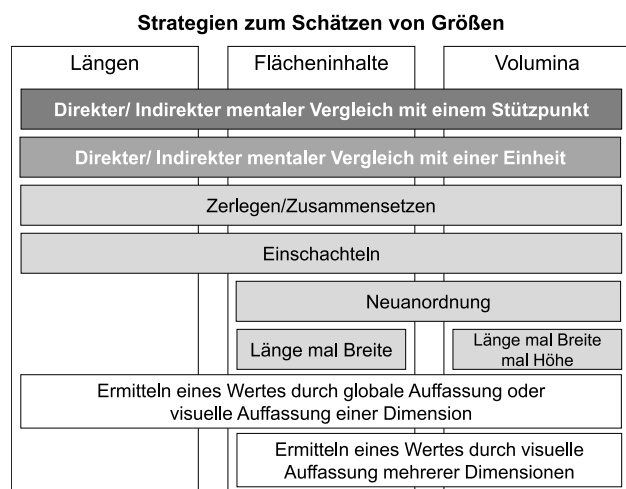


Abb. 2: Strategien zum Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina

Bereits aus der Definition des Schätzens von Größen ergibt sich die Kategorie *Direkter oder indirekter mentaler Vergleich mit einem Stützpunkt* (vgl. Abb. 2, dunkelgrau). Diese Kategorie beinhaltet solche Strategien, die allein auf dem mentalen Vergleich mit eingepprägten Repräsentanten beruhen und durch dieses Vorgehen die Ermittlung einer Größenangabe möglich machen. Die zweite Kategorie, *Direkter oder indirekter mentaler Vergleich mit einer Einheit* (vgl. Abb. 2, mittelgrau), geht auf eine Studie von Siegel et al. (1982, S. 228) zurück, in der Kinder auch durch den mentalen Vergleich mit standardisierten Einheiten zu einem Schätzergebnis kamen. Die Kategorie *Mentales Umstrukturieren der Schätzanforderung* (vgl. Abb. 2, hellgrau) beinhaltet mehrere Strategien. Diese führen in ihrer alleinigen Anwendung nicht zur Ermittlung eines Schätzwertes, Stattdessen haben sie zum Ziel, die Schätzanforderung zu vereinfachen, um die Anwendung einer anderen Strategie (in der Regel eine Vergleichsstrategie) besser zu ermöglichen. Die vierte Kategorie, *Ermitteln eines Schätzwertes durch visu-*

elle Auffassung (vgl. Abb. 2, weiß), berücksichtigt die von Heid (2017, S. 129) erkannten Reaktionen von Kindern auf eine Schätzanforderung, aufgrund des äußeren Erscheinungsbildes des zu schätzenden Objekts auf dessen Größe zu schließen.

### 2.2.1 Direkter oder indirekter mentaler Vergleich mit einem Stützpunkt

Mit Stützpunkten kann unterschiedlich mental operiert werden, um zu einem Schätzergebnis zu gelangen. Unterschieden werden hier das direkte und das indirekte mentale Vergleichen.

Die Strategie *direkter mentaler Vergleich mit einem Stützpunkt* wird in der englischsprachigen Literatur als *Benchmark Comparison* bezeichnet (Bright, 1976, S. 100; Heid, 2017, S. 124; Siegel et al., 1982, S. 226). Auch wenn das Vergleichsobjekt physisch anwesend und damit nicht nur in der Vorstellung repräsentiert ist, wird das Vorgehen dieser Strategie zugeordnet (Hildreth, 1983, S. 50).

Der Stützpunkt kann auch mental vervielfacht oder zerlegt werden, bevor ein Vergleich mit dem zu schätzenden Objekt vorgenommen wird. Dieses Vorgehen wird angewendet, wenn der Stützpunkt zu groß oder zu klein ist, um sinnvoll bei einem direkten mentalen Vergleich mit dem zu schätzenden Objekt zu einer Größenangabe zu führen. Heid (2017, S. 126) bezeichnet das Zerlegen oder Vervielfältigen eines Stützpunktes als *indirekten mentalen Vergleich*. Wenn der Stützpunkt zerlegt wird, wird dies in englischsprachiger Literatur mit *Fractional Benchmark* bezeichnet. Wird er vervielfältigt, heißt die Strategie *Multiple Benchmark* (Siegel et al., 1982, S. 213).

Beide Vorgehensweisen werden in der Literatur für die Größenart Längen beschrieben. Denkbar ist aber auch eine Übertragung auf die Größenarten Flächeninhalte und Volumina: So kann auch z. B. die Fläche eines Fußballfeldes oder das Fassungsvermögens eines Putzeimers als Stützpunkt dienen. Dennoch ist zu diskutieren, inwieweit das Vergleichen von Längen mit dem Vergleichen von Flächeninhalten und Volumina identisch ist. Beim Vergleich der Form von Flächenstücken und Körpern kann auf einen Vergleich der Seiten- bzw. Kantenlängen zurückgegriffen werden, was nicht einem *echten* Vergleich der Größenarten Flächeninhalte und Volumina entspricht.

### 2.2.2 Direkter oder indirekter mentaler Vergleich mit einer Einheit

Auch wenn Größen nicht ohne ihre Träger vorstellbar sind (vgl. Kapitel 2.1), finden sich in der Literatur Strategien, die auf dem Vergleich mit Einheiten beruhen. So führen Siegel et al. (1982, S. 228)

eine als *Benchmark* bezeichnete Strategie auf. Sie weisen explizit darauf hin, dass die Kinder in der entsprechenden Studie standardisierte Einheiten zum gedanklichen Ausmessen nutzen.

Hildreth (1983, S. 50) nennt ebenfalls eine Strategie, die auf dem gedanklichen Ausmessen mit Einheiten beruht und von ihm als *Unit Iteration* (für Längen) bzw. *Repeated Addition* (für Flächeninhalte) bezeichnet wird. Denkbar ist demnach auch, dass das Volumen durch den Vergleich mit Einheiten ermittelt werden kann. Es wird jedoch nicht beschrieben, ob bei beiden Strategien lediglich das Bild einer Einheit ohne deren Träger verstanden werden soll oder ob als Einheit auch nichtstandardisierte Einheiten und insbesondere Stützpunkte aufgefasst werden können. Aufgrund der von ihm genannten Strategie *Comparison* (Hildreth, 1983, S. 50), die sich auf den Vergleich mit Repräsentanten bezieht, ist anzunehmen, dass zu *Unit Iteration* nur standardisierte Einheiten gezählt werden.

Beim Schätzen einer Größe verläuft die Grenze zwischen den Strategien *Mentaler Vergleich mit einem Stützpunkt* und *Mentaler Vergleich mit einer Einheit* fließend. Dies wird insbesondere durch das folgende Zitat deutlich:

In order to form an estimation then, one must have a mental reference unit, that is, a mental ‚picture‘ or ‚feel‘ for the size of the unit. (Sowder, 1992, S. 371)

Die Einheit, die hier als Stützpunkt genutzt wird, kann entweder als mentales Bild (vgl. Abschn. 3.1) oder als „Gefühl“<sup>2</sup> für die Größe der Einheit vorliegen. Denkbar wäre auch, dass in den untersuchten Fällen, in denen diese Strategie auftritt, die schätzenden Personen die eventuell verwendeten Stützpunkte so verinnerlicht haben, dass sie ihnen als Objekt nicht bewusst waren, oder dass reflektierende oder sprachliche Fähigkeiten nicht ausreichend ausgeprägt waren, um die Verwendung von Stützpunkten zu beschreiben.

### 2.2.3 Mentales Umstrukturieren der Schätzanforderung

Dieser Abschnitt beinhaltet die Beschreibung von Strategien, die die ursprüngliche Schätzanforderung verändern, um anschließend eine weitere Strategie einfacher durchführen zu können. Diese Strategien sind somit als vorgeschaltete Strategien zu verstehen, die durch alleinige Verwendung nicht zu einem Schätzwert führen.

**Zerlegen/Zusammensetzen.** Das Zerlegen und anschließende Zusammensetzen des zu schätzenden Objekts benennen Siegel et al. (1982, S. 213) als *Decomposition/Recomposition*. Hildreth (1983, S. 50) bezeichnet diese Strategie als *Chunking*. Dabei wird das zu schätzende Objekt zuerst in Segmente

zerlegt, deren Größen einzeln geschätzt werden. Anschließend erfolgt eine mentale Zusammenfügung der ermittelten Größenangaben der einzelnen Segmente, um das Schätzergebnis zu erhalten. Diese Strategie ist dann geeignet, wenn für das Objekt als Ganzes kein entsprechender Stützpunkt vorliegt, der zu einem mentalen Vergleich herangezogen werden kann.

Der Prozess *Zerlegen* kann auf verschiedene Arten geschehen. Dies hängt i. d. R. mit dem zu schätzenden Objekt zusammen. *Regular Decomposition* liegt vor, wenn die einzelnen Segmente die gleiche Größe besitzen und regelmäßig angeordnet sind. Wenn eine dieser Voraussetzungen nicht gegeben ist, wird von *Irregular Decomposition* gesprochen (Siegel et al., 1982, S. 213). Die Unterteilung des Objekts kann bereits durch das Objekt selbst gegeben sein. Dies bezeichnet Hildreth (1983, S. 50) als *Use of subdivision clues*. Diese Unterteilungsmöglichkeit kann ebenfalls entweder regelmäßig oder unregelmäßig erfolgen, je nachdem, welche Struktur das zu schätzende Objekt aufweist (Siegel et al., 1982, S. 227).

Hildreth (1983, S. 50) führt darüber hinaus eine Strategie an, die sich auf das Wissen über das zu schätzende Objekt bezieht. *Prior knowledge* bedeutet, über einen Teil des Objekts bereits Informationen zu besitzen, so dass für einen Schätzprozess (unter anderem mittels der Strategie *Zerlegen/Zusammensetzen*) kein weiterer Stützpunkt mehr erforderlich ist.

Der Prozess *Zusammensetzen* beinhaltet das Zusammenfügen der einzelnen Segmente, deren Größe geschätzt wurde. Siegel et al. (1982, S. 228) beschreiben dies als Multiplikation: Die Anzahl der Segmente (die gezählt oder ebenfalls geschätzt wird) wird mit der geschätzten Größenangabe multipliziert. Dieses Vorgehen ist jedoch nur zielführend, wenn die Segmente gleich groß sind (Regular Decomposition). Ansonsten müsste eine Addition der verschiedenen Schätzwerte vorgenommen werden. Es wird nicht eindeutig formuliert, ob sowohl das zu schätzende Objekt mental wieder zusammengefügt wird oder ob sich das Zusammensetzen nur auf das Rechnen mit den Größenangaben der einzelnen Segmente bezieht. Es ist zwangsläufig notwendig, die einzelnen Größenangaben zu einer Größenangabe für das gesamte Objekt zusammenzufügen, es ist aber nicht unbedingt notwendig, auch das mental zerlegte Bild wieder zu einem Bild zusammenzufügen. Um diese Strategie sinnvoll anzuwenden, ist jedoch Verständnis darüber erforderlich, dass das mental zerlegte Bild des Objekts wieder zusammengesetzt werden könnte und die Größenangaben der einzelnen Objektteile daher summiert

die Größenangabe des zu schätzenden Objekts ergeben.

Die Strategie *Zerlegen/Zusammensetzen* ist keine Strategie, die allein zu einem Schätzergebnis führt, da es nur durch das Zerlegen und Zusammensetzen des zu schätzenden Objekts nicht zu einem Schätzergebnis kommen kann. Es ist eine weitere Strategie notwendig, um die Größe einzelner Segmente des zu schätzenden Objekts zu schätzen. Dies verdeutlichen Siegel et al. (1982, S. 228) in ihrem Modell durch den Verweis auf eine der anderen Strategien nach der Handlungsaufforderung, die Größe eines Segments zu schätzen. Auch Heid (2017, S. 137) betrachtet die Strategie *Zerlegen/Zusammensetzen* als vorgeschaltete Strategie.

Die Strategie *Zerlegen/Zusammensetzen* wird vor allem für das Schätzen von Längen beschrieben, kann aber auch für das Schätzen von Volumina angewendet werden (Heid, 2017, S. 122). Auch für das Schätzen von Flächeninhalten ist diese Strategie geeignet, da auch Flächen in kleinere Flächen zerlegt und anschließend wieder zusammengesetzt werden können.

**Einschachteln.** Um das Ermitteln eines Schätzwertes zu vereinfachen, kann ein Intervall gebildet werden, zwischen dessen Grenzen der gesuchte Schätzwert liegen soll. Siegel et al. (1982, S. 226) bezeichnen dies als *Range*, Hildreth (1983, S. 50) nennt das Vorgehen *Squeezing*, von Heid (2017, S. 123) wird es als *Einschachteln* bezeichnet. Auch diese Strategie ist nicht ohne den mentalen Vergleich mit Stützpunkten möglich: So muss sowohl für den Schätzwert der unteren Grenze als auch für den Schätzwert der oberen Grenze ein Schätzprozess stattfinden. Diese Strategie ist daher dann sinnvoll, wenn kein geeigneter Stützpunkt für einen Vergleich mit dem Objekt, dessen Größe geschätzt werden soll, vorliegt oder wenn die Strategie *Zerlegen/Zusammensetzen* nicht angewendet werden soll oder kann.

Frenzel und Grund (1991b, S. 32) beschreiben die „Angabe einer unteren und einer oberen Schranke für die gesuchte Größe“ als *Abschätzen*, welches als „Operieren (Vereinfachen, Vernachlässigen...) mit gegebenen Größen bei Beachtung bestehender Gesetzmäßigkeiten bzw. Zusammenhänge“ definiert und damit vom echten Schätzen abgegrenzt wird. Dieser Unterschied zur sonstigen Literatur ist möglicherweise damit zu erklären, dass die Strategie nicht ohne eine weitere Strategie funktioniert und eigentlich zwei Schätzungen durchgeführt werden: eine für die obere und eine für die untere Grenze. Da die bloße Notwendigkeit einer weiteren Strategie nicht ausschließt, dass ein Vorgehen ebenfalls zu den Schätzstrategien gehört (siehe *Zerlegen/Zu-*

sammensetzen und Neuordnung), wird hier das Ermitteln eines Schätzwertes durch Festlegen einer oberen und einer unteren Grenze ebenfalls als den Schätzstrategien zugehörig verstanden.

**Neuanordnung.** Die Strategie *Rearrangement* wird laut Hildreth (1983, S. 51) für das Schätzen von Flächeninhalten angewendet. Dabei wird die zu schätzende Fläche zerlegt und so wieder neu zusammengesetzt, dass ihr Flächeninhalt leichter geschätzt werden kann. Im Unterschied zum Zerlegen/Zusammensetzen wird bei dieser Strategie nicht die Größe eines Segments geschätzt, sondern die gesamte neu entstandene Fläche. Diese Strategie ist auch für das Schätzen von Volumina geeignet. So kann ein Körper zerlegt und so wieder zusammengesetzt werden, dass dessen Volumen leichter geschätzt werden kann. Für das Schätzen von Längen ist die Strategie *Neuanordnung* nicht in diesem Sinne möglich. Jedoch kann auch der Repräsentant einer Länge mental umstrukturiert werden, damit die Anwendung weiterer Strategien leichter fällt. So kann z. B. eine gekrümmte Linie (z. B. eine Straße oder der Umfang eines Objektes) in der Vorstellung zu einer geraden Linie neu angeordnet werden.

Anwendung findet diese Strategie dann, wenn der Repräsentant einer Größe eine andere äußere Struktur (z. B. Krümmung) aufweist als der Stützpunkt und daher eine Angleichung erfolgen soll. Auch um weitere Strategien anwenden zu können, kann eine Umstrukturierung im Sinne der Neuordnung hilfreich sein.<sup>3</sup>

**Länge mal Breite (mal Höhe).** Eine Strategie zum Schätzen des Flächeninhalts eines Rechtecks ist das Schätzen und anschließende Multiplizieren der Längen der Seiten. Dieses Vorgehen wird in englischsprachiger Literatur als *Length Times Width* bezeichnet (Hildreth, 1983, S. 51). Auch für das Schätzen der Volumina von Quadern ist diese Strategie denkbar, indem die dritte Dimension ergänzt wird (die Strategie heißt dann entsprechend *Length Times Width Times Height*).

Die Strategie könnte mit dem entsprechenden Formelwissen auch auf andere Flächen und Körper übertragen werden.

Zum Schätzen der Längen der Seiten bzw. Kanten muss sowohl bei Flächeninhalten als auch bei Volumina eine weitere Strategie angewendet werden. Die Umstrukturierung der Schätzanforderung bezieht sich hier nicht auf die Form des zu schätzenden Objekts, sondern auf die Veränderung der erforderlichen Vergleichsprozesse. So beziehen sich die eigentlichen Schätzstrategien des Vergleichens nicht auf die Größenarten Flächeninhalte oder Volumina, sondern auf die Größenart Längen. Daraus

ergibt sich, dass für das Schätzen von Flächeninhalten oder Volumina nicht zwangsläufig Stützpunkte aus diesen Größenarten erforderlich sind, sondern diese durch Stützpunkte zur Größenart Längen (die sich auch auf das zu schätzende Objekt beziehen können) ersetzt werden können.

#### 2.2.4 Ermitteln eines Schätzwertes durch visuelle Auffassung

Neben den Strategien, die auf einem mentalen Vergleich mit Stützpunkten beruhen, gibt es Strategien, die nur auf der Wahrnehmung des zu schätzenden Objekts beruhen. Hierzu zählt die Strategie *Eyeball*, bei der das Schätzergebnis aufgrund der subjektiven Wahrnehmung der Größen und deren Verknüpfung mit einer als groß oder klein empfundenen Größenangabe ermittelt wird (Siegel et al., 1982, S. 226). Heid (2017, S. 112) bezeichnet dies als *visuelles Vorgehen* und unterscheidet drei Arten: *das Ermitteln eines Schätzwertes durch globale Auffassung, durch die visuelle Auffassung einer Dimension sowie durch die visuelle Auffassung zweier Dimensionen*. Die globale Auffassung des zu schätzenden Objekts ist vergleichbar mit der Strategie *Eyeball*, da von den Versuchspersonen als Begründung für den Schätzwert lediglich Wörter wie groß/klein und viel/wenig genutzt werden. Bei der Berücksichtigung von einer bzw. zwei Dimensionen wird auf die Gestalt des zu schätzenden Objekts eingegangen. Dies wird bei einer Dimension durch Wörter wie z. B. lang/kurz, bei zwei und mehr Dimensionen durch Wörter wie z. B. dick/dünn, breit/schmal ausgedrückt, wie Heid (2017, S. 129) in einer Untersuchung zu Längen und Fassungsvermögen feststellte. Zum Schätzen eines Flächeninhalts bzw. eines Volumens könnte diese Strategie ebenso angewendet werden, wenn es sich um eine (näherungsweise) rechteckige Fläche bzw. um einen (näherungsweise) quaderförmigen Körper handelt.

Die visuelle Auffassung geschieht in der Regel ohne den mentalen Vergleich mit Stützpunkten und ist daher im eigentlichen Sinne keine Schätzstrategie.<sup>4</sup>

### 3. Zentrale kognitive Komponenten des Schätzprozesses

In der Kognitions- und Neuropsychologie wird das kognitive Schätzen als eine Tätigkeit genutzt, durch deren Einschränkung Defizite im Frontalhirn festgestellt werden können (D'Aniello, Castelnuovo & Scarpina, 2015, S. 1). Die Vielzahl an Schätztests, die zur Untersuchung und Unterscheidung verschiedener Defizite im Frontalhirn sowie zur Feststellung von Korrelationen mit anderen Fähigkeiten entwickelt wurden (Axelrod & Millis, 1994; Brand et al., 2002; Bullard et al., 2004; Goldstein et al., 1996; Liss, Fein, Bullard & Robins, 2000; MacPherson et



al., 2014; Mendez, Doss & Cherrier, 1998), gehen auf den Cognitive Estimation Test (CET) von Shallice und Evans (1978) zurück, die als erste einen Zusammenhang der kognitiven Schätzfähigkeit mit exekutiven Funktionen feststellten.

Das erste Modell, welches den Prozess des kognitiven Schätzens aus Sicht der Kognitionspsychologie abbildet, zeigt die Beteiligung des Arbeitsgedächtnisses, des deklarativen Langzeitgedächtnisses und einer zentralen Kontrollinstanz am Schätzprozess (Brand et al., 2002, vgl. Abb. 3). Dieses Modell wurde von D’Aniello et al. (2015) weiterentwickelt (vgl. Abb. 4). Hierzu zählt insbesondere die Spezifizierung der Vorgänge im Arbeitsgedächtnis, welche sich in Reasoning und Monitoring unterscheiden lassen. Zusätzlich werden das semantische Wissen und die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses der kristallinen Intelligenz (vgl. Abschn. 3.2) zugeordnet.

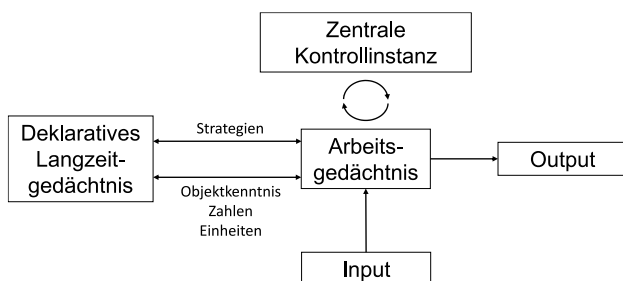


Abb. 3: Modell zum kognitiven Schätzen (Brand et al., 2002, S. 283)

Die Schätzanforderung trifft zunächst auf das *Arbeitsgedächtnis* (Brand et al., 2002, S. 283) bzw. auf die *zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses* (D’Aniello et al., 2015, S. 2). Die Verarbeitung der aufgenommenen Informationen im *Arbeitsgedächtnis* geschieht unter Rückgriff auf das *deklarative Langzeitgedächtnis* (Brand et al., 2002, S. 283), aus dem *semantisches Wissen* (D’Aniello et al., 2015, S. 2) in Form von Wissen über *Strategien, Objekte, Zahlen* und *Einheiten* (Brand et al., 2002, S. 283) abgerufen wird. Die Prozesse des Arbeitsgedächtnisses können in *Reasoning* und *Monitoring* differenziert werden. Das *Reasoning* beinhaltet das Formulieren einer Hypothese, welche im zweiten Schritt durch das *Monitoring* auf Plausibilität geprüft wird. Im Falle einer bizarren Antwort wird der Prozess erneut durchlaufen. Sofern die Hypothese als nachvollziehbar anerkannt wird, wird die Antwort als *Output* ausgegeben. *Zusätzliche Faktoren*, die auf das Reasoning einwirken, sind *räumliche Fähigkeiten*, die Fähigkeit zum *Planen und Problemlösen, numerische Fertigkeiten* sowie *Erfahrungen* (D’Aniello et al., 2015, S. 2).

Als die drei wesentlichen Schritte des Schätzprozesses können aus beiden Modellen das Verständnis der Frage im Sinne einer Repräsentation der Schätz-

anforderung im Arbeitsgedächtnis, das Reasoning als Verarbeitung der wahrgenommenen und aus dem Langzeitgedächtnis abgerufenen Informationen im Arbeitsgedächtnis und das Monitoring als Überprüfung des aus dem Reasoning hervorgehenden Ergebnisses unter Nutzung einer zentralen Exekutive abgeleitet werden.

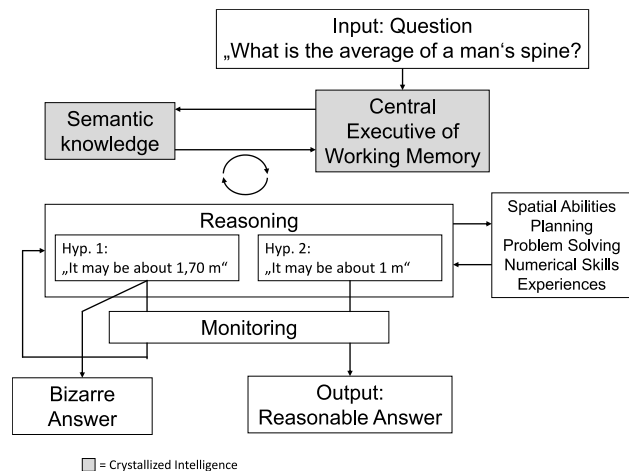


Abb. 4: Erweitertes Modell zum kognitiven Schätzen (D’Aniello et al., 2015, S. 2)

Die drei am Schätzprozess beteiligten kognitiven Komponenten sind daher das *Arbeitsgedächtnis*, das *Langzeitgedächtnis* und eine *zentrale Kontrollinstanz*, deren Tätigkeiten während des Schätzprozesses im Folgenden genauer erläutert werden.

### 3.1 Repräsentation der Schätzanforderung im Arbeitsgedächtnis

Kennzeichnend für das Arbeitsgedächtnis ist die Repräsentation von Informationen für eine kurze Zeit, die zur Weiterverarbeitung dieser Informationen benötigt wird. Diese Informationen werden entweder neu aufgenommen oder aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen (Goswami, 2001, S. 248). Das bloße Abrufen von Informationen aus dem Langzeitgedächtnis ist jedoch nicht ausreichend, um ein Schätzergebnis zu erhalten. Vielmehr müssen diese im Arbeitsgedächtnis kombiniert werden (Brand et al., 2002, S. 283). Das Anwenden von Schätzstrategien kann als eine solche Kombination von Informationen verstanden werden (Brand et al., 2002; D’Aniello et al., 2015).

In der Forschung über das Arbeitsgedächtnis fehlt eine die Forschungsansätze verbindende Definition (Berti, 2010, S. 3; Ullsperger & von Cramon, 2006, S. 482). Beispielhaft seien hier einerseits Baddeley und Hitch sowie andererseits Cowan genannt. Baddeley und Hitch verstehen das Arbeitsgedächtnis als Mehrkomponentenmodell (Baddeley, 1992, S. 556). Cowan vertritt eine eher weite Definition und rechnet alle Hilfsmittel, die den Denkprozess unterstüt-

zen, dem Arbeitsgedächtnis zu. Dazu gehört auch das Verwenden von Stift und Papier (zitiert nach Berti, 2010, S. 3).

Aufgrund dieser Spannbreite ist ein expliziter Bezug auf eines der Verständnisse des Arbeitsgedächtnisses für die Untersuchung der am Schätzprozess beteiligten Komponenten erforderlich. Brand et al. (2002, S. 282) berufen sich auf das Arbeitsgedächtnis im Sinne von Baddeley und Hitch. Demnach besteht das Arbeitsgedächtnis aus mehreren Komponenten. Einer *zentralen Exekutive* sind zwei bzw. drei Subkomponenten untergeordnet. Für die Verarbeitung von verbalen Informationen ist die *phonologische Schleife* zuständig, während Bilder und räumliche Informationen vom *visuell-räumlichen Notizblock* verarbeitet werden (Baddeley, 1992, S. 556). Als dritte Subkomponente fügte Baddeley (2000, S. 421) später den *episodischen Speicher* hinzu. Dieser kann kurzzeitig Informationen aus beiden Bereichen bereithalten und dient als Speicherkomponente für exekutive Prozesse. Diese Erweiterung ist aber umstritten (Hagendorf, 2006, S. 343).

Das Modell von D’Aniello et al. (2015, S. 1) bezieht sich ebenfalls auf die Arbeitsgedächtnisdefinition nach Baddeley und Hitch. Durch die Darstellung (vgl. Abb. 4) wird suggeriert, dass die Prozesse *Reasoning* und *Monitoring* laufend während des Austausches zwischen zentraler Exekutive des Arbeitsgedächtnisses und semantischem Wissen geschehen. Das Monitoring wird also der zentralen Exekutive des Arbeitsgedächtnisses untergeordnet: Dies kann so interpretiert werden, dass die zentrale Exekutive „Ort“ dieser Plausibilitätsprüfung ist. Die beiden Subsysteme visuell-räumlicher Notizblock und phonologische Schleife werden nicht explizit genannt.

D’Aniello et al. (2015, S. 1) weisen auf die Relevanz mentaler Bilder in Form von *Mental Imagery* hin, auf welches beim Reasoning zurückgegriffen wird. Mental Imagery bedeutet, mit Hilfe mentaler Bilder eine Lösung für ein Problem zu finden, ohne dass die verwendeten Informationen tatsächlich der Wahrnehmung zur Verfügung stehen (Kosslyn, Thompson & Ganis, 2006, S. 3). Ein mentales Bild kann wie folgt definiert werden:

A mental image occurs when a representation of the type created during the initial phases of perception is present but the stimulus is not actually being perceived; such representations preserve the perceptible properties of the stimulus and ultimately give rise to the subjective experience of perception. (Kosslyn et al., 2006, S. 4).

Mental Imagery ist dabei nicht begrenzt auf visuelle Aspekte, sondern kann ebenso auditive und taktile

Elemente enthalten (Kosslyn et al., 2006, S. 4). In Bezug auf die visuell erfassbaren Größen ist aber vor allem das visuelle mentale Bild von Relevanz. Daher ist für das Schätzen dieser Größen auch der visuell-räumliche Notizblock so bedeutend, obwohl dieser im Modell von D’Aniello et al. (2015, S. 1) nicht explizit erwähnt wird. Der visuell-räumliche Notizblock hält Informationen bereit, die auf der Wahrnehmung sichtbarer Eindrücke beruhen und als ikonische Codes bezeichnet werden (Posner & Koppitz, 1976, S. 38).

Die Subsysteme des Arbeitsgedächtnisses werden von der zentralen Exekutive gesteuert, das heißt, dass Informationen von einem System ins andere übertragen, in diese eingebracht oder aus diesen abgerufen werden (Anderson, 2013, S. 121). Darüber hinaus bestimmt die zentrale Exekutive, wie die Untersysteme genutzt werden, sie lenkt die Aufmerksamkeit und stellt die Verbindung zum Langzeitgedächtnis her. Eine weitere Aufgabe der zentralen Exekutive des Arbeitsgedächtnisses ist es, Informationen entsprechend ihrer Kodierung den Subsystemen zuzuordnen, damit sie weiterverarbeitet werden können (Smith & Jonides, 1999, S. 1659).

Die Aktivität der zentralen Exekutive wird im frontalen Kortex des Gehirns vermutet (Goswami, 2001, S. 257). Dies verdeutlicht, weshalb sie in beiden Modellen zum kognitiven Schätzen gesondert aufgeführt ist. Die Bedeutung der zentralen Exekutive für das Schätzen wird in Abschn. 3.3 erläutert.

Die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses muss als kognitive Funktion verstanden und daher vom Monitoring, einer Tätigkeit, die unter Verwendung verschiedener kognitiver Funktionen durchgeführt wird, abgegrenzt werden (vgl. Abschn. 3.3).

### 3.2 Abruf von Informationen aus dem Langzeitgedächtnis

Das Anwenden von Strategien zum Lösen der Schätzaufgabe erfordert das Abrufen von Informationen aus dem Langzeitgedächtnis (Brand et al., 2002, S. 283; D’Aniello et al., 2015, S. 2). Beide beschriebenen Modelle des kognitiven Schätzens legen durch ihre Darstellung nahe, dass das Arbeitsgedächtnis bzw. die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses mit dem Langzeitgedächtnis in Verbindung steht, um die erforderlichen Informationen zur Verwendung abzurufen. Diese Prozesse sind wesentlich für das Formulieren einer ersten Hypothese über den Schätzwert. Brand et al. beziehen sich dabei auf das *deklarative Langzeitgedächtnis*, D’Aniello et al. weisen dem *semantischen Wissen* eine große Relevanz zu.

Das Langzeitgedächtnis enthält Informationen, die dauerhaft gespeichert sind. Im Unterschied zum Arbeitsgedächtnis weist das Langzeitgedächtnis vermutlich keine Kapazitätsbeschränkung auf (van der Meer, 2006, S. 346). Das Langzeitgedächtnis wird in ein *deklaratives Langzeitgedächtnis* und ein *nichtdeklaratives Langzeitgedächtnis* unterteilt (vgl. Abb. 5 als Darstellung der Strukturzusammenhänge). Das deklarative Langzeitgedächtnis

enthält Wissen über Tatsachen. Dieses Wissen kann bewusst erinnert und genutzt werden [...]. Deklaratives Wissen ist flexibel, d. h. auch in neuartigen Situationen einsetzbar. (van der Meer, 2006, S. 347)

Im Unterschied dazu sind die Inhalte des nichtdeklarativen Langzeitgedächtnisses nicht unbedingt dem Bewusstsein zugänglich, sondern bestimmen das Verhalten und die Individualität (van der Meer, 2006, S. 348 f.). Wissen, das sich auf die „Ausführung von (automatisierten) Fertigkeiten“ (Schermer, 2006, S. 128) bezieht, ist im *prozeduralen Gedächtnis* gespeichert. Auch diese sind weitgehend nicht bewusst zugänglich, selbst wenn sie das Verhalten beeinflussen. *Prozedurales Gedächtnis* kann als eine ältere Bezeichnung für das nichtdeklarative Langzeitgedächtnis gelten (Schermer, 2006, S. 128).

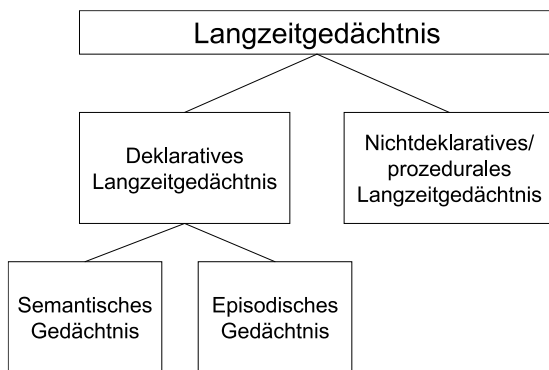


Abb. 5: Gliederung des Langzeitgedächtnisses

Für das Reasoning wird auf semantisches Wissen, räumliche Fähigkeiten und numerisches Wissen zurückgegriffen (D’Aniello et al., 2015, S. 2). Semantisches Wissen wird als „Wissen über Wortbedeutungen (Konzepte), allgemeines Faktenwissen über die Welt [...] und über Regelsysteme“ (van der Meer, 2006, 348) definiert. Demnach kann numerisches Wissen im Sinne von erlerntem mathematischem Wissen ebenfalls als semantisches Wissen aufgefasst werden. Was genau unter numerischem Wissen verstanden wird, geht aus dem Modell jedoch nicht hervor. Räumliche Fähigkeiten sprechen „verschiedenartige gedankliche Leistungen an, die vielfach zu einer Differenzierung in Teilbereiche führen“ (Franke & Reinhold, 2016, S. 61). Ein genauer Bezug, welche Differenzierung und damit welche gedanklichen Leistungen unter räumliche

Fähigkeiten gefasst werden, geht aus dem Modell ebenfalls nicht direkt hervor. Der Verweis auf Horazek et al. (2010, S. 189 ff.) legt jedoch nahe, dass die Fähigkeit, sich bewegte und unbewegte Objekte vorzustellen, für das kognitive Schätzen von Bedeutung ist. Genauer spezifiziert wird insbesondere die mentale Rotation (Horazek et al., 2010, S. 191).

Das *semantische Gedächtnis* wird als Subsystem des deklarativen Langzeitgedächtnisses aufgefasst (van der Meer, 2006, S. 347), sodass D’Aniello et al. hier eine Spezifizierung des Modells von Brand et al. vornehmen.

Mit dem Rückgriff auf Erfahrungen (D’Aniello et al., 2015, S. 2) wird auch das zweite Subsystem des deklarativen Langzeitgedächtnisses, das *episodische Langzeitgedächtnis*, als am Schätzprozess beteiligt angesehen. Das episodische Langzeitgedächtnis speichert autobiographische Ereignisse mit den raum-zeitlichen Charakteristika, d. h. „wann und wo die Information erworben wurde“ (van der Meer, 2006, S. 348).

Es ist fraglich, inwieweit nur das deklarative Langzeitgedächtnis am Schätzprozess beteiligt ist. Da automatisierte Fähigkeiten, wie das Ausführen einer einfachen Rechnung, dem nichtdeklarativen Langzeitgedächtnis zugeordnet werden, ist davon auszugehen, dass dieses auch am Schätzprozess beteiligt ist.

Im Modell von D’Aniello et al. (2015, S. 2) sind das semantische Wissen und die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses als *kristalline Intelligenz* gekennzeichnet. Dieser Begriff geht auf Cattell (1963, S. 2) zurück:

Crystallized ability loads more highly those cognitive performances in which skilled judgment habits have become crystallized [...] as the result of earlier learning application of some prior, more fundamental general ability to these fields. [...] Fluid general ability, on the other hand, shows more in tests requiring adaptation to new situations, where crystallized skills are of no particular advantage.

Auch Brand et al. (2002, S. 284) vermuten, dass für Schätzaufgaben die kristalline Intelligenz wichtiger ist als die *fluide Intelligenz*, auch wenn das in ihrem Modell nicht extra gekennzeichnet ist. Insofern scheinen erlernte Prozesse und erworbenes Wissen maßgeblich für die Schätzfähigkeit zu sein. Aus Sicht der Mathematikdidaktik ist dies von Bedeutung, weil das Entwickeln von Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen sowie damit verbundener Schätzstrategien als Prozess gesehen wird, der Zeit in Anspruch nimmt. Objekte können nicht einfach so als Stützpunkt dienen, sondern der Einsatz von Schätzstrategien muss gelernt und durch die

Lehrperson unterstützt und initiiert werden (Joram, 2003, 65 f.).

### 3.3 Überprüfung der Antwort durch eine zentrale Kontrollinstanz

Schon Shallice und Evans (1978, S. 298) verweisen auf die Bedeutung der Kontrolle des ersten ermittelten Schätzwertes:

A patient unable to obtain an appropriate strategy [...] or who has inappropriate error-checking is more likely to produce a very incorrect response.

Der dritte wesentliche Schritt im Schätzprozess ist daher die Überprüfung der Hypothese durch eine zentrale Kontrollinstanz, deren Aufgabe es ist,

mögliche Fehler zu entdecken sowie die weitere Suche nach passenden Antworten mit Hilfe anderer Strategien und/oder anderen Informationen aus dem Langzeitgedächtnis einzuleiten. (Brand et al., 2002, S. 283)

Dieses Vorgehen wird von D’Aniello et al. (2015, S. 1 f.) als *Monitoring* bezeichnet:

The hypothesis [...] is then checked by the second main level of executive processing, that is monitoring: at this stage, the formulated hypothesis is compared with all the information gleaned during the process in order to verify its consistency [...]. In case the hypothesis is considered as an inconsistent or inadequate one, it is sent back to the reasoning process.

Auch Siegel et al. (1982, S. 226 f.) verweisen auf die Relevanz der Überprüfung des durch Schätzstrategien ermittelten Schätzwertes. In ihrem Modell zur Anwendung der verschiedenen Strategien wird dies durch die vor dem Output stehende Frage „Does it seem to fit?“ oder „Reasonable?“ verdeutlicht. Wird diese Frage verneint, verweisen die Pfeile des Modells auf vorhergehende Schritte der Strategieanwendung (vgl. Abb. 6). Wie genau diese Überprüfung und damit die Beurteilung der Plausibilität stattfindet, geht aus dem Modell jedoch nicht hervor. Denkbar wäre der Vergleich der ermittelten Größenangabe mit einem weiteren Stützpunkt oder das wiederholte Anwenden der eingeschlagenen Strategie.

Das Monitoring wird als zweites Level exekutiver Funktionen bezeichnet (D’Aniello et al., 2015, S. 2), womit verdeutlicht werden soll, dass nicht nur das Reasoning (als erstes Level exekutiver Funktionen), sondern auch das Monitoring auf die exekutiven Funktionen zurückgreift und diese daher an mehreren Stellen relevant für den Schätzprozess sind (vgl. Abschn. 5.2). Auch Shallice und Evans (1978, S. 301) benennen die Relevanz der exekutiven Funktionen und weisen ebenfalls auf verschiedene Ebenen hin:

The selection and regulation of cognitive planning is one of the main functions of the human frontal lobes. Such planning functions would presumably be mediated through high-level programs which control the operation of lower-level cognitive programs.

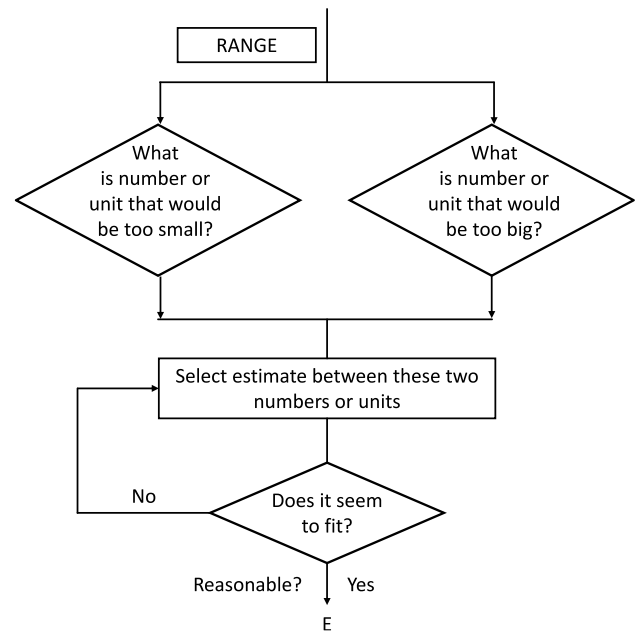


Abb. 6: Überprüfung der Plausibilität des Schätzergebnisses am Beispiel der Strategie „Range“ (Siegel et al., 1982, S. 226)

Es wird aus dem Modell von D’Aniello et al. (2015) nicht deutlich, ob die Unterscheidung in Levels derjenigen Unterscheidung entspricht, die auch Shallice und Evans vornehmen. Denkbar wäre, dass beim Reasoning eher Tätigkeiten ausgeführt werden, die den Tätigkeiten auf dem unteren Level nach Shallice und Evans entsprechen. Dies könnte z. B. arithmetisches Rechnen als Routinetätigkeit umfassen (Shallice & Evans, 1978, S. 301). Die Plausibilitätsprüfung durch die zentrale Kontrollinstanz entspräche demnach eher Tätigkeiten auf dem höheren Level nach Shallice und Evans.

Im Modell von D’Aniello et al. (2015) ist die Kontrolle zweifach dargestellt: einmal als kognitive Funktion (zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses) und einmal als Tätigkeit (Monitoring). Beide Kontrollinstanzen bedienen sich exekutiver Funktionen, was erneut zeigt, dass diese an verschiedenen Schritten des Schätzprozesses von Bedeutung sind (vgl. Abschn. 5.2).

Für das kognitive Schätzen ist die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses von besonderer Relevanz, da sie die Ausführung des Reasonings und Monitorings steuert und für die Auswahl des geeigneten Plans verantwortlich ist (D’Aniello et al., 2015, S. 1 f.)

#### 4. Kognitives Schätzen aus mathematikdidaktischer Sicht: Kontext und Rahmung eines theoretischen Modells

Die Kenntnis über Fähigkeiten, die für einen Schätzprozess erforderlich sind, ist unter anderem für das schulische Lernen von Bedeutung. Grassmann (1999, S. 34) vermutet eine Wechselwirkung beim Erwerb von Stützpunktvorstellungen und Stützpunktwissen und der Schätzfähigkeit. Zudem kann das Schätzen von Größen als Möglichkeit dienen, den physikalischen Messprozess zu verstehen (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman & Subrahmanyan, 2005, S. 4). Andererseits ist das Verständnis des Messprozesses auch Voraussetzung für den Schätzprozess (Joram et al., 1998, S. 415, vgl. auch Abschn. 5.1.4).

Weil Schätzen in der Mathematikdidaktik wie auch in der Kognitionspsychologie mit verschiedenen Schwerpunktsetzungen beforscht wird, ist für eine umfassende Betrachtung des Schätzprozesses und der darin involvierten Fähigkeiten die Kombination der Erkenntnisse aus beiden Wissenschaften gewinnbringend. Dabei ist zwischen einem *Schätzen im engeren Sinne* und einem *Schätzen im weiteren Sinne* zu unterscheiden (vgl. Abb. 7).

Wesentlich für das Durchführen eines Schätzprozesses ist aus mathematikdidaktischer Sicht das *Anwenden von Schätzstrategien*. Das Ausführen dieser Strategien kann aus kognitionspsychologischer Perspektive dem Reasoning zugeordnet werden. Damit verschränkt ist das Monitoring, welches die Plausibilität des durch die Strategien ermittelten Ergebnisses beurteilt. In kognitionspsychologischen Modellen werden zusätzlich der Input, das heißt die Schätzanforderung (meist in Form einer Schätzfrage), und der Output, das heißt der geäußerte Schätzwert, berücksichtigt. In einem Modell aus mathematikdidaktischer Perspektive steht das Schätzen im engeren Sinne, unter welchem die Strategieanwendung einschließlich deren Überprüfung verstanden wird, im Fokus.

Dem Schätzprozess im engeren Sinne geht das *Verstehen der Fragestellung bzw. der Schätzanforderung* voraus (vgl. Abb. 7, linke Spalte). Dies erfordert beim quantitativen Schätzen neben *sprachlichen Fähigkeiten* für das Verständnis einer Schätzfrage ebenso das Wissen darüber, dass eine Größenangabe als Antwort erwartet wird. Außerdem muss ein Konzept der zu schätzenden Größe vorhanden sein, um den sprachlichen Informationen zu entnehmen, welche Größe geschätzt werden soll (Hildreth, 1983, S. 50). Dies kann als *allgemeines (mathematisches) Wissen* (vgl. Abschn. 5.3.1) verstanden werden. Letztendlich muss diese Größe an ei-

nem konkreten oder mentalen Bild wiedererkannt werden können.

Nach der Anwendung von Strategien und der Überprüfung der daraus resultierenden Ergebnisse erfolgt das *Äußern des Schätzergebnisses* als Output (vgl. Abb. 7, rechte Spalte). Hierfür sind wiederum *sprachliche Fähigkeiten* erforderlich, die mit *allgemeinem (mathematischem) Wissen* (vgl. Abschn. 5.3.1) kombiniert werden müssen, um eine Größenangabe zu formulieren. Der Schätzprozess als Ganzes, so, wie er in der Kognitionspsychologie abgebildet wird, kann demnach aus mathematikdidaktischer Sicht als Schätzen im weiteren Sinne bezeichnet werden (vgl. Abb. 7 gesamt).

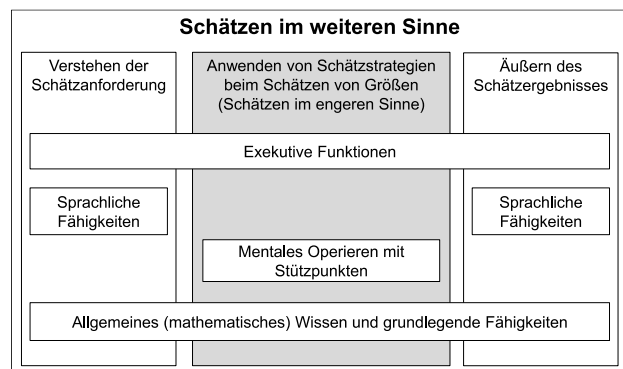


Abb. 7: Schätzen im weiteren Sinne

Das Schätzen im engeren Sinne (vgl. Abb. 7, mittlere Spalte) beruht auf dem *mentalen Operieren mit Stützpunkten* unter Anwendung *exekutiver Funktionen* sowie *allgemeinen mathematischen Wissens und grundlegender Fähigkeiten*. Diese drei Aspekte sind wesentlich für das Anwenden von Schätzstrategien beim Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina und werden daher in dem im nächsten Kapitel vorgestellten Modell weiter spezifiziert. Die Verbindung des Schätzens aus mathematikdidaktischer Sicht mit dem kognitiven Schätzen aus psychologischer Sicht wird hier durch die Verschränkung von Fähigkeiten aus beiden Disziplinen sowie durch die mathematikdidaktische Interpretation psychologischer Fähigkeiten ausgedrückt. Das hier vorgestellte Modell bezieht sich auf die Fähigkeiten, die für das Schätzen von Längen, Flächeninhalten und Volumina erforderlich sind. Eine Übertragung auf das Schätzen von anderen Größen, Anzahlen oder Rechenergebnissen ist zumindest teilweise nicht ausgeschlossen, aber aufgrund der Besonderheiten der visuell erfassbaren Größen nicht intendiert. Ebenso müsste für das qualitative Schätzen von Größen eine Anpassung einzelner Fähigkeiten vorgenommen werden, insbesondere auf der sprachlichen Ebene.<sup>5</sup>

## Anwenden von Schätzstrategien beim Schätzen von Größen (Schätzen im engeren Sinne)

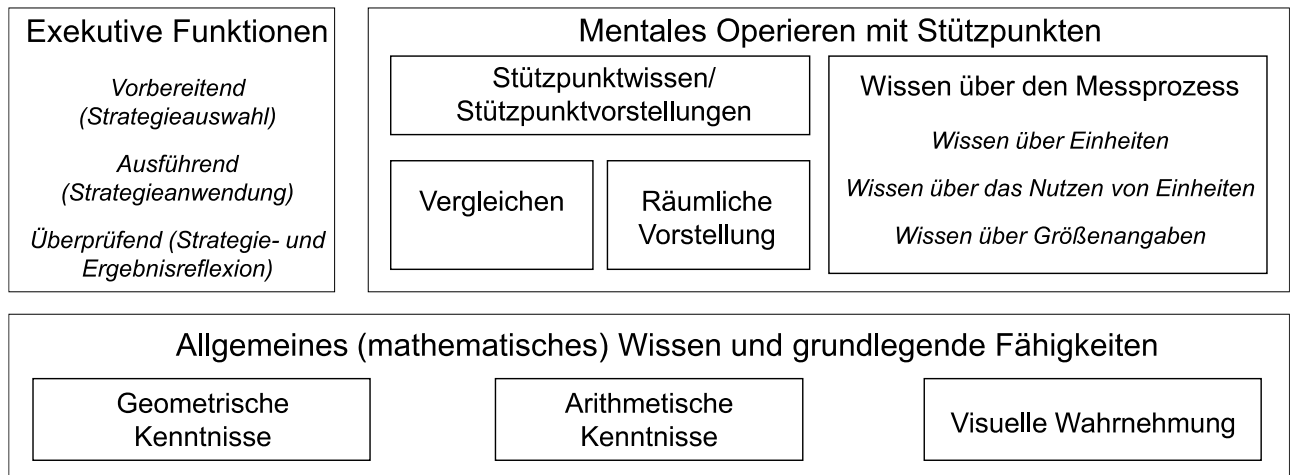


Abb. 8: Schätzen im engeren Sinne und dazu erforderliche Fähigkeiten (auf Hauptkategorien reduziertes Modell)

### 5. Schätzen im engeren Sinne: Modell zum Schätzen visuell wahrnehmbarer Größen

Aus mathematikdidaktischer Sicht ist insbesondere die detaillierte Betrachtung der Strategieanwendung beim Schätzen von Größen interessant. In der Forschung über Schätzstrategien herrscht zwar Konsens über die Existenz der meisten Schätzstrategien (vgl. Kapitel 2.2), welche Fähigkeiten zur Ausführung erforderlich sind, wurde jedoch bisher in mathematikdidaktischer Literatur noch nicht detailliert erfasst. Es lassen sich drei Gruppen von Fähigkeiten, die zur Anwendung von Schätzstrategien erforderlich sind, differenzieren: das *mentale Operieren mit Stützpunkten*, die *exekutiven Funktionen* sowie *allgemeines (mathematisches) Wissen und grundlegende Fähigkeiten*.

Abbildung 8 zeigt eine erste Ausdifferenzierung dieser drei Gruppen, die im Folgenden näher betrachtet und dadurch weiter spezifiziert werden.

Eine Gesamtdarstellung des vollständig ausdifferenzierten Modells befindet sich im Anhang.

#### 5.1 Mentales Operieren mit Stützpunkten

Schätzstrategien im mathematikdidaktischen Sinne beruhen hauptsächlich auf dem Operieren mit Stützpunkten (vgl. Abschn. 2.2). Dies umfasst neben dem direkten mentalen Vergleich auch das Zerlegen und Zusammensetzen sowie Teilen und Vervielfachen von Stützpunkten. Für diese Tätigkeiten sind vier Aspekte von Relevanz: das *Wissen über Stützpunkte*, die Fähigkeit zu *vergleichen*, die Fähigkeit zur *räumlichen Vorstellung* sowie das *Wissen über den Messprozess* (vgl. Abb. 9).

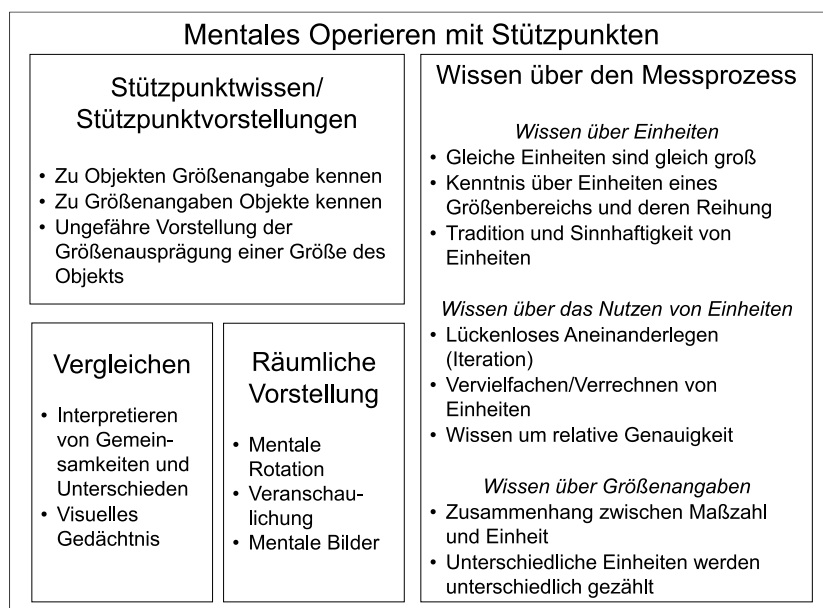


Abb. 9: Mentales Operieren mit Stützpunkten im Schätzprozess

### 5.1.1 Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen

Stützpunkte sind die Objekte, mit denen das zu schätzende Objekt verglichen werden soll (vgl. Abschn. 2.1). Damit ein Objekt als Stützpunkt verwendet werden kann, ist es erforderlich, die *Größenangabe der entsprechenden Größe zu kennen* und auch mit der entsprechenden Größe am Objekt zu verbinden (vgl. Abb. 10). Beides setzt voraus, dass die schätzende Person weiß, dass Objekte Träger mehrerer Größen (und anderer Eigenschaften) sind und zusätzlich in der Lage ist, die erforderliche Größe (als Eigenschaft) von den anderen Eigenschaften zu abstrahieren. So muss der Fokus auf der zu schätzenden Größe liegen und alle anderen, für die Schätzung unwichtigen Eigenschaften müssen ausgeblendet werden (Nunes, 1992, S. 558). Stützpunktwissen sollte in zwei Richtungen abrufbar sein: Zum einen sollten zu *Repräsentanten die entsprechenden Größenangaben* genannt werden können, zum anderen sollten zu *Größenangaben passende Repräsentanten* genannt werden können.

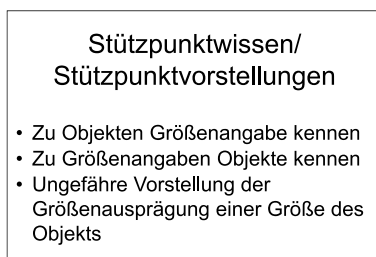


Abb. 10: Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen

Weil Stützpunkte in der Regel nicht physisch anwesend sind und weil das Operieren mit Stützpunkten nur auf mentaler Ebene erfolgt, sind Stützpunktvorstellungen (neben Stützpunktwissen) von zentraler Relevanz für den Schätzprozess. Diese Vorstellungen werden als

mentale Vorstellungen [...] in einem weiteren Sinne als die Verarbeitung von wahrnehmungsähnlichen Informationen in Abwesenheit externer Quellen perzeptueller Information (Anderson, 2013, S. 75)

definiert. Als Besonderheit gelten die mentalen Bilder, die „als interne Repräsentation von visuellen und räumlichen Informationen“ (Anderson, 2013, S. 75) verstanden werden können.

Die schätzende Person sollte demnach mentale Bilder der Stützpunkte aus dem Gedächtnis abrufen können. Dies ist nicht nur für die mentalen Operationen wie mentale Rotation, Zerlegung oder Vervielfältigung relevant, sondern auch für die Auswahl eines passenden Stützpunktes für den Vergleich. Bezogen auf die Größe bedeutet dies, dass nicht nur die quantitative Ausprägung in Form einer Größenangabe bekannt, sondern auch die *ungefähre quali-*

*tative Größenausprägung des Stützpunktes* in Form eines mentalen Bildes repräsentiert sein sollte (genauere Ausführungen zum (mental) Vergleichen befinden sich in Abschn. 5.1.2).

Auch für das Monitoring sind Stützpunkte hilfreich. So könnte das Ergebnis eines Schätzprozesses auch mit anderen Stützpunkten verglichen werden, um die Plausibilität zu beurteilen. Entweder kann dies ein anderer Stützpunkt sein, der für die ermittelte Größenangabe naheliegend ist (auch deshalb ist die Fähigkeit, Stützpunkte in zwei Richtungen verwenden zu können, von Bedeutung) und mit dem zu schätzenden Objekt nach Anwendung der Strategie Zerlegen bzw. Vervielfachen eines Stützpunktes mittels eines einfachen Vergleichs in Beziehung gesetzt wird, oder es handelt sich um das qualitative Vergleichen der Größen der Objekte.

Auch Hope (1989, S. 15) verweist auf die Bedeutung von Stützpunkten sowohl für das Ermitteln eines Schätzwertes als auch für das Überprüfen einer Antwort:

A knowledge of a wide variety of everyday measurement referents [...] is the foundation of good measurement sense [...]. If children cannot refer to some meaningful equivalence, they will find it difficult to produce estimates as well as to judge the reasonableness of a quantitative statement.

In einigen Fällen wird auch der Vergleich mit einer Einheit als Schätzstrategie beschrieben (vgl. Abschn. 2.2.2). In diesem Fall kann die entsprechende Einheit, die zum Vergleich herangezogen wird, als Stützpunkt verstanden werden. Dies ist jedoch eher mit einem „Gefühl“ für Größenausprägungen zu erklären (Hope 1989, S. 15; Joram 2003, S. 57; Kuwahara Lang, 2001, S. 462), da, wie in Abschn. 2.1 dargestellt wird, Größen ohne Träger nicht vorstellbar sind und somit auch in Gedanken nicht mit Einheiten allein operiert werden kann.

### 5.1.2 Vergleichen

Wesentlich für das Anwenden der Schätzstrategien, die auf dem In-Beziehung-Setzen von Stützpunkten und zu schätzendem Objekt beruhen, ist das Vergleichen (vgl. Abb. 11). Auch der Messprozess, der dem Zerlegen oder Vervielfachen eines Stützpunktes zugrunde liegt, ist ein Vergleich eines Stützpunktes (als Einheit) mit dem Objekt, dessen Größe ermittelt werden soll. Der Vergleichsprozess erfordert die *Wahrnehmung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden und deren Interpretation*.

In der Regel ist bei kognitiven Schätzaufgaben nur eines oder sogar keines der Objekte physisch anwesend. Für den direkten Vergleich zweier Objekte, von denen eines nur in der Vorstellung repräsentiert

ist, ist das *visuelle Gedächtnis* von besonderer Relevanz.

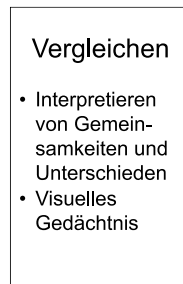


Abb. 11: Vergleichen

Diese Fähigkeit ermöglicht es, Merkmale eines nicht mehr präsenten Objekts auf ein präsenten Objekt zu beziehen (Franke & Reinhold, 2016, S. 59). Dies gilt auch, wenn beide Objekte (Stützpunkt und zu schätzendes Objekt) nur in der Vorstellung repräsentiert sind, weil

der mentale Prozeß, der der Imagination zugrunde liegt, [...] dem Prozeß der Wahrnehmung von Objekten oder Bildern ähnlich (Brander, Kompa & Peltzer, 1989, S. 78)

ist.

Neben der Wahrnehmung von Gemeinsamkeiten oder Unterschieden ist es von Relevanz, die wahrgenommenen Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Objekts und des Stützpunktes bezogen auf die entsprechende Größe zu interpretieren. Dies wiederum setzt das Wissen über die Stützpunkte und allgemeine geometrische Kenntnisse (vgl. Abschn. 5.3.1) voraus.

Der Vergleich von Größenausprägungen, die sich quantitativ wenig unterscheiden, fällt in der Regel schwerer als der Vergleich von Größenausprägungen, die sich quantitativ deutlicher unterscheiden. Dennoch werden sich Objekte, die eine ähnliche Größenausprägung aufweisen, häufiger bildlich vorgestellt als Objekte, die einen hohen Größenunterschied aufweisen (Anderson, 2013, S. 80).

Es wird deutlich, dass der visuell-räumliche Notizblock des Arbeitsgedächtnisses an der Lösung von Schätzaufgaben beteiligt ist, da visuelles Informationsmaterial zum Abruf bereitgestellt wird (Cassels, 1995, S. 171). Um diese Informationen abrufen zu können, sind die Komponenten der visuellen Wahrnehmung (vgl. Abschn. 5.3.3) grundlegend.

### 5.1.3 Räumliche Vorstellung

Für das mentale Operieren mit Stützpunktvorstellungen ebenfalls von Relevanz sind Fähigkeiten der Raumvorstellung (vgl. Abb. 12). Diese umfassen die Fähigkeit, sich bewegte und unbewegte Objekte vorzustellen sowie die Existenz mentaler Bilder. Das gedankliche Bewegen von Objekten bezieht

sich insbesondere auf die Fähigkeit, Objekte mental zu rotieren (Horazek et al., 2010, S. 189 ff., vgl. Abschn. 3.2). Maier (1999, S. 14) differenziert aus Sicht der Mathematikdidaktik insgesamt sechs Aspekte der räumlichen Vorstellung. Für das Schätzen von Größen bedeutsam ist, analog zu den Forschungsergebnissen aus der Neuro- und Kognitionspsychologie, die Fähigkeit zur *mentalen Rotation*. Sie „charakterisiert die Fähigkeit, sich Rotationen von zwei- oder dreidimensionalen Objekten vorzustellen“ (Maier, 1999, S. 12).

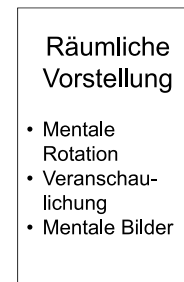


Abb. 12: Räumliche Vorstellung

Auch eine weitere Komponente der Raumvorstellung beinhaltet das gedankliche Operieren mit Objekten und wird ähnlich eingeordnet wie die mentale Rotation (Maier, 1999, S. 14). Dies ist die Fähigkeit zur *Veranschaulichung*, welche „die gedankliche Vorstellung von Aktivitäten wie Verschiebungen, Faltungen oder Schnitten von räumlichen Objekten oder Objektteilen“ (Maier, 1999, S. 11) umfasst.

Diese Fähigkeiten stehen in einem engen Zusammenhang mit der Fähigkeit zu vergleichen. So kann eine mentale Rotation nützlich sein, um den Vergleich zu erleichtern, etwa wenn die Ausrichtung des Merkmals der Stützpunktvorstellung nicht der Ausrichtung des Merkmals des zu schätzenden Objekts entspricht. Genauso können andere gedankliche Transformationen notwendig sein, etwa wenn zwei Gefäße, deren Fassungsvermögen miteinander verglichen werden soll, eine unterschiedliche Form besitzen (Franke & Ruwisch, 2010, S. 187). Auch für die Schätzstrategie Zerlegen/Zusammensetzen sind räumliche Fähigkeiten von besonderer Relevanz: So muss das zu schätzende Objekt gedanklich zerlegt und wieder zusammengesetzt werden, um die Ermittlung einer Größenangabe durch weitere Strategien erst zu ermöglichen.

Räumliche Fähigkeiten sind für alle drei Größenarten von Relevanz. Dies zeigt sich insbesondere im Umgang mit Stützpunkten: Auch Stützpunkte für Längen und Flächeninhalte haben drei Dimensionen, die in der Vorstellung interpretiert und verarbeitet werden müssen. Darüber hinaus sind die Teilkomponenten der Raumvorstellung nach Maier sowohl für zwei- als auch für dreidimensionale Objekte formuliert. Dies geht zum einen direkt aus der



Definition jedes Teilbereiches hervor, zum anderen wird mit Aufgaben zur Raumvorstellung häufig das Erkennen eines Zusammenhangs zwischen zwei- und dreidimensionalen Objekten getestet (Maier, 1999, S. 11 f.).

Für das Schätzen mittels des mentalen Vergleichs mit Stützpunkten ist es erforderlich, überhaupt ein *mentales Bild* der entsprechenden Objekte abrufen zu können, weshalb das Wissen über Stützpunkte und das Operieren mit ihnen in einem engen Zusammenhang stehen.

### 5.1.4 Wissen über den Messprozess

Ohne Kenntnis über den Messprozess ist es nicht möglich, mit Stützpunkten als nichtstandardisierte Einheiten einen mentalen Messprozess durchzuführen (Sowder, 1992, S. 383; Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998, S. 433). Insbesondere die Strategie Zerlegen/Vervielfachen eines Stützpunktes greift auf einen mentalen Messprozess zurück (vgl. Abschn. 5.3.1). An dieser Stelle überschneidet sich das Wissen über den Messprozess mit der Fähigkeit zu vergleichen, da sowohl im Mess- als auch im Schätzprozess die Grundidee des Vergleichens mit Einheiten verankert ist (Bright, 1976, S. 88; Frenzel & Grund, 1991a, S. 12).<sup>6</sup>

Allgemein liegen dem Messprozess drei Tätigkeiten zugrunde: Festlegen einer Einheit, die unabhängig von Zeit und Raum ist, das wiederholte Benutzen dieser Einheit, wenn das zu Messende größer als die Einheit ist, sowie das systematische Untergliedern der Einheit, wenn das zu Messende kleiner ist als die Einheit (Peter-Koop, 2008, S. 21). Darüber hinaus muss für das Angeben des Messergebnisses der Zusammenhang zwischen Maßzahl und Einheit bekannt sein. Es lassen sich daher drei Aspekte ausmachen, die für das Verständnis des Messprozesses erforderlich sind: das *Wissen über Einheiten*, das *Wissen über das Nutzen von Einheiten* sowie das *Wissen über Größenangaben* (vgl. Abb. 13).

Um Einheiten nutzen zu können, ist zunächst ein Konzept von Einheiten als solche erforderlich. Dies bedeutet zunächst zu wissen, dass *gleiche Einheiten gleich groß* sind. Für den Umgang mit Einheiten, die größer sind als das zu schätzende Objekt, ist es notwendig zu wissen, dass Einheiten ebenfalls Träger einer Größe sind, die wiederum aus Einheiten aufgebaut sind. Dies wird bei der Strategie Zerlegen eines Stützpunktes deutlich: Der Stützpunkt, verstanden als Einheit, muss zerlegt werden (dies setzt die Kenntnis darüber voraus, dass auch Einheiten immer weiter untergliedert werden können) und diese, nun kleinere Einheit, wird zum Vergleich mit dem zu schätzenden Objekt herangezogen.

Zum Wissen über Einheiten gehören darüber hinaus die *Kenntnis der standardisierten Einheiten der entsprechenden Größenart* einerseits und *deren Reihung* andererseits. Dies ist Voraussetzung dafür, die Ausprägung der entsprechenden Größe in der richtigen, zur Größenart passenden Einheit angeben und, falls erforderlich, damit rechnen zu können (siehe Wissen über das Nutzen von Einheiten).

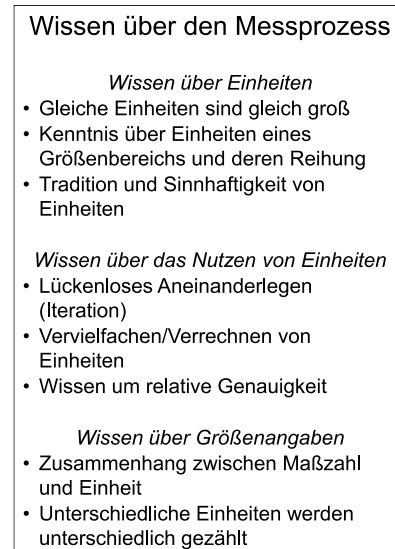


Abb. 13: Wissen über den Messprozess

Wenn Kinder das Wissen über die Einheiten der Größenarten Flächeninhalte und Volumina im Sinne von abgeleiteten Einheiten besitzen, erleichtert es ihnen das Anwenden von Strategien wie Länge mal Breite bzw. Länge mal Breite mal Höhe. So kann die Einheit für den Flächeninhalt aus Einheiten von Längen gebildet werden, indem diese quadriert werden. Bei Einheiten für die Größenart Volumina ist zwischen der abgeleiteten Einheit Kubikmeter und den Einheiten für Fassungsvermögen Liter und Milliliter zu unterscheiden und eventuell deren Zusammenhang zu nutzen.

Um die Entscheidung treffen zu können, in welcher Einheit eine Größenangabe erfolgen soll, ist ebenfalls die *Kenntnis der üblichen Konventionen und Sinnhaftigkeit von Einheiten* notwendig.

Das Wissen über Einheiten ist die Voraussetzung dafür, dass ein Stützpunkt als Einheit genutzt werden und im Sinne des Messprozesses wiederholt mental am zu schätzenden Objekt abgetragen werden kann. Dieser Prozess, das Nutzen von Einheiten, erfolgt beim Schätzen mental, berücksichtigt aber dieselben Grundideen wie ein konkret durchgeführter Messprozess. So muss dieses Abtragen lückenlos und ohne Überlappung geschehen. Dies wird für Längen als *Iterating* bezeichnet (Stephan & Clements, 2003, S. 4). Für Flächeninhalte gilt das Prinzip *structuring an array*, welches besagt, dass beim

Auslegen einer Fläche mit kleineren Flächen ein bestimmtes Gitter berücksichtigt werden muss (Stephan & Clements, 2003, S. 4 f.). Gleiches gilt für das Messen von Volumina (Battista, 2003, S. 123, Battista & Clements, 1996, S. 263; vgl. Abschn. 2). Generell lassen sich die Grundideen des Messens und die Entwicklung des Messverständnisses der Größenart Längen auch auf die Größenarten Flächeninhalte und Volumina übertragen (Clarke, Cheeseman, McDonough & Clarke, 2003, S. 75; Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003, S. 109 und S. 118).

Beim mentalen Vergleich mit Einheiten oder beim Schluss von Stützpunkten auf standardisierte Einheiten muss eine zur Größe passende Einheit ausgewählt werden. Dazu kann es erforderlich sein, zwischen zwei Einheiten einer Größenart zu wechseln: Wenn der Stützpunkt 30 cm lang ist und achtmal gezählt wurde, ist es wahrscheinlich, dass das Schätzergebnis als 2,40 m oder 2 m und 40 cm angegeben wird (und nicht als 240 cm), weil es im kulturellen Kontext üblicher ist. Neben arithmetischen Grundkenntnissen ist hier die Fähigkeit erforderlich, *mit Einheiten zu rechnen*, was die Kenntnis der Reihenfolge und die entsprechenden zahlenmäßigen Beziehungen zwischen den Einheiten eines Größenbereichs (Umrechnungszahlen) voraussetzt.

Das Rechnen mit Einheiten wird bei der Strategie Länge mal Breite oder Länge mal Breite mal Höhe direkt gefordert. Indirekt ist die relationale Betrachtung der Einheiten zueinander auch bei Strategien der visuellen Auffassung mit mehreren Dimensionen von Bedeutung: So muss bei der Beurteilung des Fassungsvermögens eines Zylinders der Durchmesser des Gefäßes mit der Höhe ins Verhältnis gesetzt werden, um zu einem begründeten Schätzergebnis zu gelangen. Bezogen auf den Messprozess für Flächeninhalte bedeutet dies, dass Flächeninhalte von rechteckigen Figuren nicht nur durch iteratives Auslegen, sondern auch durch Messen der Seitenlängen und das Rechnen mit den entsprechenden Größenangaben ermittelt werden können. Für das Messen von Volumina wird diese Rechnung (bei quaderförmigen Objekten) durch eine dritte Dimension ergänzt. Beim Messen von Fassungsvermögen wird der indirekte Charakter des Formelwissens deutlich, wenn die Größenangabe durch Höhe des Füllstandes an einer Skala abgelesen werden kann. Der mögliche Füllstand variiert durch das Verändern des Durchmessers des Gefäßes.

Sowohl beim Schätzen als auch beim Messen ist es erforderlich, über die *relative Genauigkeit* des jeweiligen Prozesses informiert zu sein und dies auf das eigene Nutzen der Einheiten zu beziehen, um zu entscheiden, wann das Nutzen der Einheit im Sinne eines Messprozesses zu einem zufriedenstellenden

Ergebnis geführt hat. Damit das Nutzen der Einheiten am Ende zu einer Größenangabe führt, müssen die genutzten Einheiten gezählt werden, um die Größe als Vielfaches der genutzten Einheit angeben zu können. Dies erfordert ein Verständnis des *Zusammenhangs zwischen Maßzahl und Maßeinheit*. Darüber hinaus muss bei Verwendung unterschiedlicher Einheiten auch das Verständnis vorhanden sein, dass bei der Verwendung mehrerer, verschiedenen großer Einheiten der Zählprozess nicht einfach fortgeführt werden darf (Stephan & Clements, 2003, S. 4 f.). Dies baut auf das Verständnis des Konzepts von Einheiten auf und besagt, dass *unterschiedliche Einheiten unterschiedlich gezählt* werden.

## 5.2 Exekutive Funktionen

Während des Schätzprozesses sind die *exekutiven Funktionen* von besonderer Relevanz (vgl. Abb. 14). Defizite in den exekutiven Funktionen bedeuten meist auch eine defizitäre Schätzleistung, wie eine Vielzahl an Studien aus der Kognitionspsychologie belegt (vgl. Abschn. 3).

Unter exekutiven Funktionen versteht man

mentale Prozesse höherer Ordnung, die immer dann ins Spiel kommen, wenn wir Handlungen planen oder Absichten/Ziele über mehrere Schritte hinweg verfolgen. (Konrad, 2007, S. 300)

Welche kognitiven Tätigkeiten als exekutive Funktionen verstanden werden, ist hingegen nicht eindeutig festgelegt. Erwähnt werden Aktivitäten wie Planen, Problemlösen, Inhibition und Flexibilität (Kaufmann, Nuerk, Konrad & Willmes, 2007, S. 404). Andere Autorinnen und Autoren nennen Aufmerksamkeit und Inhibition, Aufgaben-Management, Handlungsplanung, Handlungsüberwachung (Ullsperger & von Cramon, 2006, S. 480), Inhibition, kognitive Flexibilität (Kubesch & Walk, 2009, S. 309) sowie Ablauforganisation, Aufmerksamkeit und Inhibition, Planen, Überwachung und Kodierung (Smith & Jonides, 1999, S. 1657). Gemeinsam haben alle Aktivitäten, dass Handlungs- bzw. Denkschritte geplant und kontrolliert sowie Prozesse, die dem Ziel nicht dienlich sind, unterbunden werden.

In Kapitel 3.3 wurde bereits herausgearbeitet, dass der Rückgriff auf exekutive Funktionen an vielen Stellen des Schätzprozesses geschieht. Je nach Zeitpunkt der Anwendung im Schätzprozess lassen sich daher drei Gruppen von exekutiven Funktionen unterscheiden: solche, die *vorbereitend* und zur Strukturierung der Schätzanforderung angewendet werden, solche, die den Einsatz von Strategien *begleiten*, und solche, die für die *Prüfung des Ergebnisses* erforderlich sind (vgl. Abb. 14).

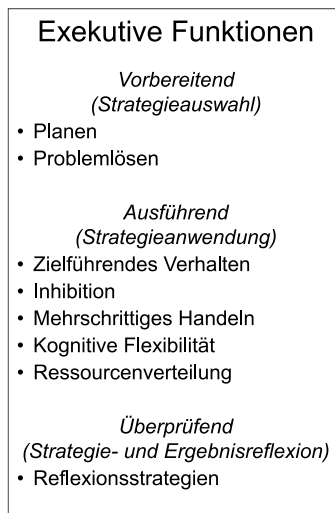


Abb. 14: Exekutive Funktionen im Schätzprozess

Wird die schätzende Person mit der Schätzanforderung konfrontiert, so muss sie die Fragestellung verstehen und eine geeignete Vorgehensweise wählen, mit der sie der gewünschten Lösung näherkommt.

Der Übergang zwischen dem Wählen und dem Ausführen einer Strategie, also vom Verständnis der Frage zum Reasoning im Sinne des kognitiven Schätzens aus psychologischer Sicht, ist nicht eindeutig festgelegt. So wird sowohl während der Strategieauswahl als auch während der Strategieanwendung auf die exekutiven Funktionen *Planen* und *Problemlösen* zurückgegriffen, welche durch die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses ausgeführt werden (vgl. Abschn. 3.1).

Die Fähigkeit zum *mehrschrittigen Handeln* geht mit der Fähigkeit zum Planen einher. Sie zeigt sich besonders bei der Verwendung von Strategien, die das Anwenden einer weiteren Strategie erfordern (vgl. Abschn. 2.2). Hier müssen mehrere Schritte hintereinander und vorausschauend ausgeführt werden. Strategien wie Einschachteln oder Zerlegen und Zusammensetzen werden weniger angewendet als andere Strategien (Heid, 2017, S. 139). Eine mögliche Erklärung wäre die zusätzliche Anforderung, die durch die Notwendigkeit des Anwendens einer weiteren Strategie entsteht. Diese kann durch das Anwenden von Strategien, die die exekutiven Funktionen kognitive Flexibilität und mehrschrittiges Handeln nicht in solch besonderer Weise herausfordern, vermieden werden.

Insbesondere während des Ausführens der Strategien sind *zielführendes Verhalten* und *Inhibition* von Relevanz, um den Schätzprozess weiter- und zu Ende zu führen. Personen mit einem hohen Ablenkungspotential bzw. geringer Inhibitionskontrolle zeigen schlechtere Schätzleistungen (Brand et al., 2002, S. 288). D'Aniello, Scarpina, Albani, Castelnovo und Mauro (2015, S. 1428) stellten hingegen

keine signifikante Korrelation zwischen der Interferenzanfälligkeit und der Schätzleistung fest.

*Kognitive Flexibilität* ist dann gefragt, wenn die vorliegende Aufgabe nicht bekannt ist und/oder mit Hilfe bekannter Techniken nicht gelöst werden kann. Dazu muss in einer Situation erlerntes Wissen auf eine andere Situation übertragen werden können (Mandl, Kopp & Dvorak, 2004, S. 21). Darüber hinaus ist kognitive Flexibilität dann erforderlich, wenn Aufmerksamkeit zwischen verschiedenen Anforderungen aufgeteilt werden muss (Bellebaum, Thoma & Daum, 2012, S. 71 f.). Beide Aspekte sind für das Bearbeiten einer Schätzaufgabe relevant. Die Strategie zur Ermittlung der Größe ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich und die Größenangabe muss aus bereits erlerntem Wissen abgeleitet werden. Im Kontext des Schätzens kann das Stützpunktwissen als bereits erlerntes Wissen, das auf die unbekannte Größe übertragen werden muss, verstanden werden. Darüber hinaus kann kognitive Flexibilität bei Strategien, die eine Umstrukturierung der Schätzanforderung beinhalten, relevant sein.

Zu den exekutiven Funktionen gehört an dieser Stelle auch die *Verteilung von Ressourcen*, die in der Regel ebenfalls durch die zentrale Exekutive des Arbeitsgedächtnisses vorgenommen wird (Goswami, 2001, S. 257, vgl. Abschn. 3.1).

Exekutive Funktionen sind nicht nur während der Ausführung der Schätzung, sondern ebenfalls bei der Überprüfung der ermittelten Größenangabe von Relevanz (vgl. Abschn. 3.3). So sind *Reflexionsstrategien* erforderlich, mit denen entschieden werden kann, ob der Schätzprozess erneut ausgeführt werden muss oder ob das Schätzergebnis als endgültig geäußert werden kann. Diese Strategien sind jedoch bisher noch nicht für das Schätzen beschrieben worden. Denkbar wäre, wie in Kapitel 3.3 beschrieben, ein Abgleich mit anderen Stützpunkten oder das Anwenden einer anderen Strategie.

Darüber hinaus ist auch für das Monitoring die Fähigkeit des Planens und Problemlösens relevant, da unter Umständen der Schätzprozess nicht ganz von Anfang, sondern nur von einer bestimmten Stelle des Plans oder der Strategie neu begonnen werden muss.

### 5.3 Allgemeines (mathematisches) Wissen und grundlegende Fähigkeiten

Neben den Fähigkeiten, die direkt für den Schätzprozess erforderlich sind, gibt es Fähigkeiten, die das Verwenden der genannten Fähigkeiten erst ermöglichen und so grundlegend sind, dass sie an fast allen Stellen des Schätzprozesses Anwendung finden. Diese sind in Abb. 15 dargestellt und lassen

sich in drei Gruppen differenzieren: *Geometrische Kenntnisse*, *Arithmetische Kenntnisse* und die Fähigkeit zur *visuellen Wahrnehmung*.

Die geometrischen und arithmetischen Kenntnisse können einerseits als allgemeines Wissen bezeichnet werden, andererseits gibt es aus Sicht der Mathematikdidaktik klare geometrische bzw. arithmetische Bezüge. Daher wird es hier als *allgemeines (mathematisches) Wissen* bezeichnet. Die visuelle Wahrnehmung wird als grundlegende Fähigkeit bezeichnet, da der Schätzprozess von visuell erfassbaren Größen auf der Wahrnehmungsfähigkeit beruht.

Allgemeines (mathematisches) Wissen und grundlegende Fähigkeiten		
Geometrische Kenntnisse	Arithmetische Kenntnisse	Visuelle Wahrnehmung
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konzept der entsprechenden Größe</li> <li>• Implizites und explizites Formelwissen</li> <li>• Wissen über Objekte als Träger mehrerer Größen</li> <li>• Konzept deckungsgleich/auslegungsgleich/zerlegungsgleich</li> <li>• Invarianz</li> </ul>	<p><i>Wissen über Zahlen/ Zahligenschaften</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kenntnis der Zahlenreihe</li> <li>• Mentales Zählen</li> <li>• Dezimalzahlen, Brüche</li> <li>• Zahlaspekte</li> </ul> <p><i>Rechnen</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundrechenarten</li> <li>• Verdoppeln/halbieren</li> <li>• Runden</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Gestaltgesetze der Wahrnehmung</li> <li>• Theorie der Komponentenerkennung</li> <li>• Rekognition/Wahrnehmungskonstanz</li> <li>• Visuelle Unterscheidung</li> <li>• Figur-Grund-Diskrimination (Abstraktion eines Merkmals)</li> </ul>

Abb. 15: Allgemeines (mathematisches) Wissen und grundlegende Fähigkeiten im Schätzprozess

### 5.3.1 Geometrische Kenntnisse

Als grundlegend für den gesamten Schätzprozess von Längen, Flächeninhalten und Volumina sowie als allgemeines (geometrisches) Wissen verstanden werden die in Abb. 16 dargestellten Fähigkeiten.

Geometrische Kenntnisse
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Konzept der entsprechenden Größe</li> <li>• Implizites und explizites Formelwissen</li> <li>• Wissen über Objekte als Träger mehrerer Größen</li> <li>• Konzept deckungsgleich/auslegungsgleich/zerlegungsgleich</li> <li>• Invarianz</li> </ul>

Abb. 16: Geometrische Kenntnisse

Für das Schätzen von Größen ist ein grundlegendes Verständnis darüber, was Größen sind bzw. wie sie beschrieben werden können, erforderlich. Insbesondere für das Verständnis der Schätzanforderung und die Auswahl einer passenden Strategie ist ein *Konzept der entsprechenden Größe* notwendig (Hildreth, 1983, S. 50).<sup>7</sup>

Für die Vorstellung von Repräsentanten als Träger der entsprechenden Größe spielt somit *implizites Formelwissen* im Sinne der Bewusstheit von Ein-, Zwei- oder Dreidimensionalität eine Rolle, während für das Anwenden der Schätzstrategie Länge mal Breite (mal Höhe) auch *explizites Formelwissen* und das Inbeziehungsetzen verschiedener Größen relevant ist. Gleichzeitig ist hier auch das Wissen über *Objekte als Träger mehrerer Größen* in beiden Schritten des Schätzprozesses relevant: Zum einen muss die Größe, deren Ausprägung geschätzt werden soll, von den anderen Größen des Objekts abstrahiert werden. Dies erfordert zusätzlich die Fähigkeit, diese verschiedenen Größen auch unterscheiden zu können und mit den visuell sichtbaren Eigenschaften (Seite, Kante, Fläche) zu verknüpfen. Zum anderen können verschiedene Größen eines Objekts zueinander in Beziehung gesetzt werden, wenn die schätzende Person weiß, dass Objekte Träger mehrerer Größen sind und an welcher Stelle des Objekts die Ausprägung der Größe sichtbar ist.

Für die Auswahl eines passenden Stützpunktes ist es sowohl erforderlich, die entsprechende Größe am Stützpunkt zu abstrahieren, als auch zu wissen, dass der Stützpunkt ebenfalls Träger mehrerer Größen ist. So ist für die Frage nach der Größe einer Länge ein Stützpunkt, dessen Volumen bekannt ist, nicht unbedingt hilfreich (vorausgesetzt, die Kantenlängen können nicht aus dem Volumen errechnet werden). Andersherum kann ein Stützpunkt, dessen Länge bekannt ist, durch explizites Formelwissen und der Anwendung der Strategie Länge mal Breite (mal Höhe) für die Ermittlung eines Flächeninhalts oder eines Volumens hilfreich sein, wenn auch die Länge des zu schätzenden Objekts abstrahiert werden kann und das Objekt die Anwendung der entsprechenden Formel ermöglicht.

Die Grundidee des gedanklichen Ausmessens mit Stützpunkten, für die das Wissen über den Messprozess vorausgesetzt wird, erfordert neben der Auswahl eines geeigneten Stützpunktes durch Abstrahieren der entsprechenden Größe ein *Konzept über Deckungs- bzw. Auslegungsgleichheit*. Dies ist erforderlich, um die Äquivalenz zweier Größen festzustellen und zu beurteilen, ob zwei Größen demnach die gleiche Ausprägung haben oder ob eine kleiner oder größer ist als die andere. Für das Schätzen und den Vergleich bzw. das gedankliche Ausmessen mit Stützpunkten ist dennoch zu erwähnen, dass fehlende Kongruenz nicht bedeuten muss, dass zwei Größen eine unterschiedliche Ausprägung haben. So können zwei unterschiedlich gekrümmte Linien trotzdem gleich lang sein, auch wenn sie sich in ihrer Form unterscheiden (gleiches gilt für unterschiedliche Repräsentanten von Flächeninhalten und Volumina). Insbesondere für das Schätzen von Flä-

cheninhalten und Volumina ist daher das Verständnis von *Zerlegungsgleichheit* nützlich.

Grundlegend für das gedankliche Nutzen von Stützpunkten und für die mentale Rotation von Objekten ist das Verständnis darüber, dass sich die Größe eines Objekts bei Bewegung oder Transformation nicht ändert. Dies wird von Stephan und Clements (2003, S. 5) als *Conservation* bezeichnet, Piaget und Szeminska (1975, S. 22) sprechen von *Invarianz*. Beim Messen ist das Verständnis von Invarianz deshalb von Bedeutung, weil im physischen Messprozess der Träger der verwendeten Einheit eventuell nicht ausreichend oft vorhanden ist, um ihn an der gesamten Größe abzutragen. So muss verstanden werden, dass auch ein Träger der Einheit wiederholt angelegt werden kann und sich dessen Größe dadurch nicht ändert (auf Längen bezogen vgl. Castle & Needham, 2007, S. 219). Dies ist auch für die Strategie Vervielfachen eines Stützpunktes von Bedeutung, da das Anlegen nicht physisch erfolgen kann und die angelegten Objekte nicht tatsächlich gezählt werden können. Für den Messprozess bei Fassungsvermögen ist darüber hinaus von Bedeutung, dass das Zählen der Einheiten gleichzeitig mit dem Umschütten erfolgen muss, da sie im Nachhinein in der Regel nicht mehr ablesbar sind (Franke & Ruwisch, 2010, S. 227). Auch bei Strategien, die das Umstrukturieren der Schätzanforderung erfordern, ist ein Verständnis der Invarianz erforderlich. Dazu gehört das Wissen darüber, dass sich die Größe eines Objekts nicht ändert, wenn es zerlegt und wieder zusammengesetzt wird oder wenn die Ausrichtung verändert wird. Dies gilt auch für das Objekt, welches ausgemessen wird (z. B. beim Anwenden der Strategie Neuordnung, vgl. Abschn. 2.2.3).

### 5.3.2 Arithmetische Kenntnisse

Die für den Schätzprozess relevanten arithmetischen Kenntnisse umfassen zum einen das *Wissen über Zahlen und Zahleigenschaften* und zum anderen die *Fähigkeit zum Rechnen* (vgl. Abb. 17).

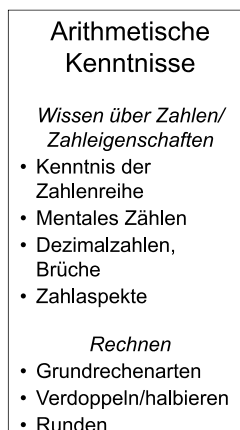


Abb. 17: Arithmetische Kenntnisse

Das Wissen über Zahlen beinhaltet die *Kenntnis der Zahlenreihe* und die Fähigkeit, diese *mental beim Zählen von Objekten zu durchlaufen*. Das Zählen von Objekten ist für das Verständnis des Messprozesses von Relevanz, wenn die Einheiten gezählt werden, um die Maßzahl für die Größenangabe zu ermitteln. Aber auch die Strategie Einschachteln erfordert die Kenntnis der Zahlenreihe: So muss die Größenangabe des zu schätzenden Objektes zwischen den Größenangaben zweier Stützpunkte eingeordnet werden. Hier spielt insbesondere auch die Verknüpfung der Maßzahl mit der entsprechenden Einheit eine Rolle: 30 cm ist eine kleinere Größenausprägung als 1 m, obwohl 30 die größere Zahl ist. Soll die Einheit zwischen diesen beiden Größenangaben Meter sein, so ist zusätzlich *Wissen über Dezimalzahlen* oder *Brüche* erforderlich.

Das Wissen über Zahlen beinhaltet auch das Wissen darüber, dass dieselbe Zahl in unterschiedlichen Zusammenhängen unterschiedliche Bedeutungen haben kann. Das Wissen über *Zahlaspekte* beinhaltet das Wissen darüber, dass die Zahl vor einer Einheit als Maßzahl zu bezeichnen ist und die Anzahl der entsprechenden Einheiten angibt (Maßzahlaspekt). Beim Rechnen mit Einheiten ist darüber hinaus zwischen der Maßzahl und der Rechenzahl zu unterscheiden, wenngleich dies nicht explizit benannt werden muss.

Das Rechnen im Schätzprozess umfasst zunächst die *Grundrechenarten*. Alle Strategien, die den Vergleich mit einem Stützpunkt beinhalten, die aber eine standardisierte Einheit hervorbringen sollen, erfordern nach dem Vergleich das Umrechnen der Größenangabe des Stützpunktes in die gewünschte Größenangabe mit standardisierter Einheit. Dies geschieht nicht unbedingt streng nacheinander: So wird bei der Strategie Vervielfachen eines Stützpunktes vermutlich nicht die Größenangabe mit dem Stützpunkt als Einheit geäußert, sondern die Umrechnung geschieht parallel mit dem Zählprozess der Stützpunkte. Hierbei kann auch das Zählen in Schritten (in der Größenangabe des Stützpunktes) hilfreich sein. Dennoch muss ein Verständnis von Multiplikation und Addition bei der Ermittlung der Größe durch die Strategie Vervielfachen eines Stützpunktes vorhanden sein, wie auch Siegel et al. (1982, S. 227) beschreiben. Für die Strategie Zerlegen eines Stützpunktes ist zusätzlich das Verständnis der Division erforderlich. So ist es unwahrscheinlich, dass beim Halbieren des Stützpunktes mit 0,5 multipliziert wird, sondern es ist eher praktikabel, durch zwei zu teilen. Die Subtraktion ist beim Zerlegen eines Stützpunktes nicht so intuitiv vorzunehmen wie die Addition beim Vervielfachen eines Stützpunktes: So muss erst die Größe des Teils vom Stützpunkt, der nicht verwendet wird, geschätzt

werden, um sie dann von der Größe des gesamten Stützpunktes zu subtrahieren.

Auch beim Rechnen mit Größenangaben sind die Grundrechenarten relevant. So kann es erforderlich sein, innerhalb eines Größenbereiches in eine andere Einheit umzurechnen oder zwei Größenangaben aus unterschiedlichen Größenbereichen miteinander zu verrechnen (hierzu auch Abschn. 5.1.4).

Das *Verdoppeln und Halbieren* ist neben den geometrischen auch für die arithmetischen Fähigkeiten von Relevanz. Sollte ein Stützpunkt gedanklich verdoppelt oder halbiert werden, um seine Größe an die des zu schätzenden Objekts anzupassen, muss dies auch mit der Größenangabe geschehen. Das Verdoppeln und Halbieren ist nicht unbedingt rechnerisch erforderlich, so kann bekannt sein, dass 100 das Doppelte von 50 ist (mit entsprechend passender Größeneinheit), ohne das bewusst eine Multiplikation mit zwei erforderlich ist. Dies ist jedoch nur ein Spezialfall im Umgang mit Zahlen, der aufgrund der in der Grundschule unterrichteten Rechenstrategien eine Relevanz haben könnte und nicht direkt mit dem Schätzen in Verbindung stehen muss.

Auch das *Runden* spielt beim Schätzen eine Rolle: So ist es nicht zweckdienlich, eine geschätzte Größe z. B. mit 4,36 m anzugeben. Hier ist abzuwägen, wie exakt die Schätzung sein muss, um die Maßzahl entsprechend anzupassen (Sowder, 1992, S. 373).<sup>8</sup>

### 5.3.3 Visuelle Wahrnehmung

Die Besonderheit und Gemeinsamkeit der Größenarten Längen, Flächeninhalte und Volumina liegt in deren visueller Wahrnehmbarkeit. Aus diesem Grund ist die *Fähigkeit zur visuellen Wahrnehmung* fundamental bedeutend für das Schätzen dieser drei Größenarten und findet Anwendung nicht nur beim Verständnis der Schätzanforderung, sondern auch bei der Strategieanwendung (vgl. Abb. 18).

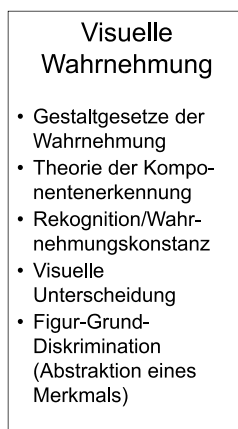


Abb. 18: Visuelle Wahrnehmung

Die Wahrnehmung mentaler Bilder erfolgt in ähnlicher Weise wie die Wahrnehmung realer Objekte

(Anderson, 2013, S. 82). Aus diesem Grund ist visuelle Wahrnehmung zunächst die Grundlage dafür, an den (vorgestellten oder physisch anwesenden) zu schätzenden Objekten die Größe auszumachen, deren quantitative Ausprägung ermittelt werden soll, und trägt somit zum Verständnis der Schätzanforderung bei. Bei Anwendung der Schätzstrategien ist visuelle Wahrnehmung erforderlich, um Eigenschaften an Stützpunkten zu erkennen. Für das Überprüfen des Schätzwertes kann visuelle Wahrnehmung herangezogen werden, wenn Eigenschaften des zu schätzenden Objekts mit der ermittelten Größenangabe gedanklich in Beziehung gesetzt werden.

Visuelle Wahrnehmung beruht auf der Verarbeitung visuell dargebotener Informationen. Um Objekte wahrzunehmen, reicht es nicht aus, Linien im Raum wahrzunehmen, sondern sie müssen darüber hinaus gruppiert werden (Anderson, 2013, S. 30 ff.). Bei dieser Ordnung sind die *Gestaltgesetze der Wahrnehmungsorganisation* relevant. Diese umfassen das Prinzip der Nähe, nach dem nahe beieinanderliegende Elemente als Einheit wahrgenommen werden, das Prinzip der Ähnlichkeit, nach dem ähnliche Objekte gruppiert werden, das Prinzip des glatten Verlaufs, nach dem das zusammengehört, was augenscheinlich zusammenpasst, und das Prinzip der Geschlossenheit, nach dem Objekte, die nicht vollständig sichtbar sind, passend zu den sichtbaren Strukturen mental ergänzt werden (Anderson, 2013, S. 33). Um nun ein Objekt nicht nur wahrzunehmen, sondern als Objekt zu erkennen, ist die *Theorie der Komponentenerkennung* von Bedeutung. Hiernach findet das Erkennen von Objekten in drei Stufen statt: auf der ersten Stufe wird das Objekt in Teilobjekte untergliedert. Auf der zweiten Stufe erfolgt die Klassifizierung dieser Teilobjekte (für eine ausführlichere Betrachtung siehe Anderson, 2013, S. 37 ff.). Auf der dritten Stufe werden die erkannten Teilobjekte wieder zu einem Objekt zusammengefügt, welches dann erkennbar ist (Anderson, 2013, S. 37).

Sollte sich bei der gedanklichen Zerlegung eines Objekts, zum Beispiel bei der Strategie Zerlegen/Zusammensetzen oder beim Zerlegen eines Stützpunktes, an der Struktur orientiert worden sein, so kann durch das Prinzip der Nähe oder das Prinzip der Ähnlichkeit gedanklich eine Strukturierung der Teilobjekte des Objekts stattfinden oder wahrgenommen werden. Um die Zerlegung des zu schätzenden Objekts am Vorwissen zu Teilen des Objekts festzumachen, sind genau diese Fähigkeiten ebenfalls relevant. Darüber hinaus ist aber ein Wiedererkennen der bekannten Segmente des Objekts Voraussetzung, da diese in der Regel nicht einzeln vorliegen, sondern als Teilobjekte des zu schätzenden Objekts. Das Wiedererkennen von Informationen, auch als *Rekognition* bezeichnet, muss nicht

bewusst erfolgen (Cassels, 1995, S. 163). So kann eine regelmäßige oder eine unregelmäßige Unterteilung des zu schätzenden Objekts unter Zuhilfenahme der Strukturierung des Objekts oder des Wissens über einzelne Teile des Objekts geschehen. Das Wiedererkennen von Objekten – auch in unterschiedlicher Lage oder aus unterschiedlichen Perspektiven – wird in Anlehnung an Frostig als *Wahrnehmungskonstanz* bezeichnet (Franke & Reinhold, 2016, S. 57). Weil aber nicht nur das Wahrnehmen von Gemeinsamkeiten, sondern auch von Unterschieden eine Rolle spielt, ist in Anlehnung an Hoffer auch die *visuelle Unterscheidung* von Relevanz (Franke & Reinhold, 2016, S. 59).

Um überhaupt einen Vergleich zweier Objekte vornehmen zu können, ist auch die Fähigkeit zur *Figur-Grund-Diskrimination* notwendig, um ein Objekt in der Umwelt wahrzunehmen oder um einzelne Segmente einer Figur oder eines Körpers zu erkennen (Franke & Reinhold, 2016, S. 55). Eine bestimmte Größe unabhängig von anderen Eigenschaften zu betrachten, kann darüber hinaus als *Fähigkeit zur Abstraktion* verstanden werden.

## 6. Resümee

Aus schulischer Sicht ist die Fähigkeit zu schätzen aus mindestens zwei Gründen von Bedeutung: Zum einen kann das Schätzen als Grundlage für ein tiefgehendes Verständnis des Messprozesses gesehen werden (Bright, 1976, S. 87; Joram et al., 1998, S. 414; Joram et al., 2005, S. 4). Zum anderen bedarf das Schätzen aufgrund seiner alltäglichen Bedeutung (Joram et al., 2005, S. 4) nicht unbedingt einer weiteren Legitimation, um Unterrichtsthema zu sein.

Im Gegensatz zum Schätzen ist das Messen vielfach untersucht und durch Einzelfähigkeiten dargestellt worden (z. B. Stephan & Clements, 2003). Aufgrund der hohen Bedeutung des Schätzens für das Verständnis des Messprozesses, für das Entwickeln von Stützpunktwissen und Stützpunktvorstellungen sowie für den Alltag ist es daher unerlässlich, auch für das Schätzen die Einzelfähigkeiten zu untersuchen.

Die Modelle zum kognitiven Schätzen und die darauf aufgebauten Studien sind für das mathematikdidaktische Verständnis des Schätzprozesses nicht zufriedenstellend. So liegt hier der Fokus auf den beteiligten kognitiven Komponenten und weniger auf Einzelkompetenzen und deren Verknüpfung. Die entwickelten Tests enthalten eine wenig fundierte Auswahl an Schätzfragen, die neben der gleichzeitigen Abfrage von quantitativen und qualitativen Schätzanforderungen sowohl das Schätzen von Größen (aller Art) und Anzahlen enthalten. Die

Konstrukte des Schätzens, die hier zugrunde liegen, können aus diesem Grunde einer mathematikdidaktischen Betrachtung nicht genügen.

Die aus mathematikdidaktischer Sicht für das Schätzen relevanten Aspekte beziehen sich insbesondere auf die Strategieanwendung. Dies wird als Schätzen im engeren Sinne bezeichnet, um es vom Schätzen aus kognitionspsychologischer Sicht abzugrenzen.<sup>9</sup> Die dafür erforderlichen Fähigkeiten sind hauptsächlich, aber nicht nur, mathematisches Wissen und mathematische Fähigkeiten. Das entwickelte Modell zeigt, welche grundlegenden Fähigkeiten vorhanden sein müssen, um überhaupt die Strategien zum Schätzen von Längen, Flächeninhalten oder Volumina ausführen zu können.<sup>10</sup>

Insbesondere die mathematischen Fähigkeiten können gut an bestimmten Punkten des Schätzens im engeren Sinne (der Strategieanwendung) festgemacht werden, während die Fähigkeiten, die aus psychologischer Sicht beschrieben werden, häufig den gesamten Schätzprozess betreffen und hauptsächlich für die Koordination der Strategieanwendung erforderlich sind. Da es sich bei den Größenarten Längen, Flächeninhalte und Volumina um visuell erfassbare Größen handelt, ist die Fähigkeit zur visuellen Wahrnehmung grundlegend für den Schätzprozess und kann als verbindendes Element zwischen mathematischen und psychologischen Fähigkeiten angesehen werden.

Das Modell geht über eine bloße Auflistung der für das Schätzen von Größen erforderlichen Fähigkeiten hinaus, indem Abhängigkeiten und Hierarchien durch die Anordnung in Kästchen und deren Verschachtelung dargestellt werden. Weitere Verknüpfungen werden nicht grafisch aufgezeigt, da das Modell sonst an Übersichtlichkeit verlore und die wesentliche Aussage, nämlich die der interdisziplinären Betrachtung von Fähigkeiten, verloren ginge.

Die Erkenntnis aus der Kognitionspsychologie, dass bei der Anwendung von Schätzstrategien das Wissen und die Fähigkeiten einzeln nicht zielführend sind, sondern erst in ihrer Kombination ein begründbares Schätzergebnis ermöglichen (vgl. Abschn. 3.1), führt zur Betrachtung von Prozessmodellen. Mit der Interpretation aus mathematikdidaktischer Sicht und, damit verbunden, mit dem Fokus auf der Strategieanwendung und den dafür erforderlichen Fähigkeiten liegt der Schwerpunkt des hier vorgestellten Modells aspektorientiert auf den Inhalten eines Schätzprozesses und weniger auf der zeitlichen Abfolge der Schritte des Schätzens von Größen. Denkbar wäre daher in weiteren Modellen eine Ergänzung der Fähigkeiten, die für das Verständnis der Schätzanforderung und der Formulierung eines Outputs erforderlich sind (Schätzen im weiteren

Sinne), bevor ein vollständiges Prozessmodell formuliert werden könnte.

Der nächste Schritt für die empirische Untersuchung des Modells ist dessen Operationalisierung. Hierfür kann die Unterscheidung verschiedener Schätzaufgaben nach Bright (1976, S. 90) herangezogen werden, um eine möglichst breite Aufgabenvielfalt zu gestalten. Es ist aber auch zu berücksichtigen, dass alle genannten Fähigkeiten und deren Klassifizierung Anwendung in den Schätzaufgaben finden.

## Anmerkungen

- <sup>1</sup> Das Wort „Größenart“ wird verwendet, wenn die physikalischen Eigenschaften bei der Nennung im Vordergrund stehen (z. B. bei der Betonung, ob es sich um Längen, Flächeninhalte oder Volumina handelt). „Größenbereich“ wird bei Nennung aus mathematischer Fundierung genutzt (z. B. bei Betonung der mathematischen Strukturen).
- <sup>2</sup> Es ist nicht abschließend geklärt, wie bei Menschen, die keinen Stützpunkt äußern, die Größe im Gedächtnis repräsentiert ist. In Anlehnung an *Number Sense* wurde der Begriff *Measurement Sense* eingeführt. *Measurement Sense* bedeutet, ein Gefühl für die Größe von Einheiten oder Objekten zu besitzen (Hope 1989, S. 15; Joram, 2003, S. 57; Kuwahara Lang, 2001, S. 462), so dass der Begriff „Gefühl“ für hier gewählt wurde.
- <sup>3</sup> Denkbar wäre auch eine Veränderung der äußeren Form des Stützpunktes, obwohl dann nicht mehr die Schätzanforderung, sondern die Mittel zur Bearbeitung gedanklich umstrukturiert werden würden.
- <sup>4</sup> Die Nennung eines Vorgehens, das auf rein visueller Wahrnehmung beruht, könnte dem *Measurement Sense* zugeordnet werden (vgl. Endnote 2).
- <sup>5</sup> Hier ist vermutlich semantisches Wissen in Form von Begriffswissen und semantischen Netzen von Bedeutung. Darüber hinaus kommt dem Objektwissen eine erhöhte Bedeutung zu, da nicht nur Wissen über ein zu schätzendes Objekt vorhanden sein muss, sondern ebenfalls über alle Objekte, die der Anforderung nicht entsprechen (z. B. bei der Frage: Welches ist der größte Gegenstand in einem Haus?).
- <sup>6</sup> Trotzdem sollte der Messprozess nicht nur als ein Vergleich aufgefasst werden. Dies ist damit zu begründen, dass zwischen der zu messenden Größe und der Größe, mit der gemessen wird, unterschieden werden muss (Frenzel & Grund, 1991a, S. 12).
- <sup>7</sup> Hier ist insbesondere das Konzept von Volumina von Relevanz, da verschiedene Vorstellungen verbunden mit verschiedenen Begriffen zugrunde liegen können. So kann das Volumen als Fassungsvermögen aufgefasst werden, zu dem in der Grundschule die Einheiten Liter und Milliliter gehören. Die zweite Vorstellung umfasst die „Vorstellung von Körpern, welche mit Einheitswürfelchen ausgemessen oder aber konstruiert werden“ (Ruwisch, 2012, S. 40). Hier ist insbesondere die Formel Länge mal Breite mal Höhe von Relevanz. Die dritte Vorstellung ist die der Verdrängung. Hier muss erkannt werden, dass ein Körper, der in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß mehr Flüssigkeit verdrängt als ein anderer Körper, ein größeres Volumen hat als dieser Körper (Ruwisch, 2012, S. 43).
- <sup>8</sup> Forrester, Latham und Shire (1990, S. 284) unterscheiden drei Ebenen, in denen Schätzungen vorgenommen werden können. Diese beziehen sich auf den Kontext der Schätzaufgabe. Die soziale bzw. diskursive Ebene

beruht auf der Annahme, dass das kindliche Verständnis des Diskurses im Unterricht durch das Wiedererkennen bestimmter Themen gekennzeichnet ist. Das bedeutet, dass es notwendig ist, eine Schätzsituation zu erkennen und mit der Art und Weise, wie eine Schätzung durchgeführt wird, zu verbinden. Eine Schätzaufgabe kann etwa als Trick-Aufgabe gestellt werden oder es kann gelernt worden sein, dass Schätzen bedeutet, ein exaktes Ergebnis so zu verändern, dass es ungenau ist. Die zweite Ebene ist die Risiko- bzw. Wahrscheinlichkeitsebene. In diesem Kontext kommt es darauf an, die Folgen der Schätzung absehen zu können und danach Risiken abzuwägen. Die dritte Ebene kann als idealisiertes oder neutrales Schätzen bezeichnet werden. Dabei geht es ausschließlich um das Ermitteln eines möglichst genauen Schätzwertes. Sollte auf dieser Ebene eine Risikoabwägung stattfinden, so ist sie hypothetisch.

- <sup>9</sup> Für das *kognitive Schätzen* müsste mindestens der Beginn genauer dargestellt werden, der das Verständnis der Frage und die Aufbereitung der Anforderung im Arbeitsgedächtnis enthält. Hier ist der visuell-räumliche Notizblock von besonderer Relevanz. Ebenfalls interessant wäre die Einbindung von weiteren prozessualen Aspekten, etwa wie die Auswahl des ersten Stützpunktes geschieht und wie die Entscheidung für einen endgültigen Output fällt.
- <sup>10</sup> Offen bleibt, inwieweit das Modell auf das Schätzen anderer Größen oder das Schätzen von Anzahlen übertragbar ist.

## Literatur

- Anderson, J. R. (2013). *Kognitive Psychologie*. Berlin: Springer.
- Axelrod, B. N. & Millis, S. R. (1994). Preliminary Standardization of the Cognitive Estimation Test. *Psychological Assessment*, 1(3), 269-274.
- Baddeley, A. (1992). Working Memory. *Science*, 255(5044), 556-559.
- Baddeley, A. (2000). The episode buffer: a new component of working memory? *Trends in cognitive sciences*, 4(11), 417-423.
- Battista, M. T. (2003). Understanding Students' Thinking about Area and Volume Measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 122-142). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.
- Bellebaum, C.; Thoma, P. & Daum, I. (2012). *Neuropsychologie*. Wiesbaden: Springer.
- Berti, S. (2010). Arbeitsgedächtnis: Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eines theoretischen Konstrukts. *Psychologische Rundschau*, 61(1), 3-9.
- Blankenagel, J. (1983). Schätzen, Überschlagen, Runden. Bestandsaufnahme, Reflexion und Möglichkeiten (2). *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, 11(9), 315-322.
- Brand, M.; Fujiwara, E.; Kalbe, E.; Kessler, J. & Markowitsch, H. J. (2002). Kognitives Schätzen bei Alzheimer- und Korsakow-Patienten. *Praxis Klinische Verhaltensmedizin und Rehabilitation*, 15(60), 282-291.



## D. Weiher & S. Ruwisch

- Brander, S.; Kompa, A. & Peltzer, U. (1989). *Denken und Problemlösen. Einführung in die kognitive Psychologie*. 2., durchgesehene Auflage. Opladen: Westdeutscher Verlag.
- Bright, G. W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. In National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.), *Yearbook* 38 (S. 87-104). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bullard, S. E.; Fein, D.; Gleeson, M. K.; Tischer, N.; Mapou, R. L. & Kaplan, E. (2004). The Biber Cognitive Estimation Test. *Archives of Clinical Neuropsychology*, 19(6), 835-846.
- Casels, A. (1995). *Erinnern und Vergessen*. In P. Banyard; J. Gerstenmaier & P. Holler (Hrsg.), *Einführung in die Kognitionspsychologie* (S.153-193), München: Reinhardt.
- Castle, K. & Needham, J. (2007). First Graders' Understanding of Measurement. *Early Childhood Education Journal*, 35(3), 215-221.
- Cattell, R. B. (1963). Theory of Fluid and Crystallized Intelligence: A critical Experiment. *Journal of Educational Psychology*, 54(1), 1-22.
- Clarke, D.; Cheeseman, J.; McDonough, A. & Clarke, B. (2003). Assessing and Developing Measurement with Young Children. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 68-80). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- D'Aniello, G. E.; Castelnuovo, G. & Scarpina, F. (2015). Could cognitive estimation ability be a measure of cognitive reserve? *Frontiers in Psychology*, 6, 1-4.
- D'Aniello, G. E.; Scarpina, F.; Albani, G.; Castelnuovo, G. & Mauro, A. (2015). Disentangling the relationship between cognitive estimation abilities and executive functions: a study on patients with Parkinson's disease. *Neurological Sciences*, 36(8), 1425-1429.
- Forrester, M.A.; Latham, J. & Shire, B. (1990). Exploring Estimation in Young School Children. *Educational Psychology*, 10(4), 283-300.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. 3. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. 2. Auflage. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Frenzel, L. & Grund, K.-H. (1991a). Umgang mit Größen: Fachlich exakt – trotzdem schülergemäß. *mathematik lehren*, 45, 10-14.
- Frenzel, L. & Grund, K.-H. (1991b). Wie „groß“ sind Größen? *mathematik lehren*, 45, 15-24 u. 31-34.
- Friebel, A. C. (1967). Measurement understandings in modern school mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 14(6), 476-480.
- Goldstein, F. C.; Green, J.; Presley, R. M.; O'Jile, J.; Freeman, A.; Watts, R. & Green, R. C. (1996). Cognitive Estimation in Patients with Alzheimer's Disease. *Neuropsychiatry, Neuropsychology, and Behavioral Neurology*, 9(1), 35-42.
- Goswami, U. (2001). *So denken Kinder. Einführung in die Psychologie der kognitiven Entwicklung*. Bern: Huber.
- Grassmann, M. (1999). Zur Entwicklung von Zahl- und Größenvorstellungen als wichtigem Anliegen des Sachrechnens. *Grundschulunterricht*, 46(4), 31-34.
- Griesel, H. (1996). Grundvorstellungen zu Größen. *mathematik lehren*, 78, 15-19.
- Grode, H.-P. (2001). Mathematik, Physik. In P. Kiehl & N. Breutmann (Hrsg.), *Einführung in die DIN-Normen* (S. 935-965). Stuttgart: Teubner.
- Grund, K.-H. (1992). Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung beim Anwenden von Mathematik. *Grundschule*, 24(12), 42-44.
- Hagendorf, H. (2006). Arbeitsgedächtnis. In J. Funke & J. Bengel (Hrsg.), *Handbuch der Allgemeinen Psychologie – Kognition* (S. 340-345). Göttingen: Hogrefe.
- Heid, M. (2017). *Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen: Eine Interviewstudie zu Strategien mit Kindern im 4. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hildreth, D. J. (1983). The Use of Strategies in Estimating Measurements. *The Arithmetic Teacher*, 30(5), 50-54.
- Hogan, T. P.; Brezinski, K. L. (2003). Quantitative Estimation: One, Two, or Three Abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280.
- Hope, J. (1989). Promoting Number Sense in School. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-16.
- Horazek, J.; Preiss, M.; Tintera, J.; Laing, H.; Kopecek, M.; Spaniel, F.; Brunovsky, M.; Höschl, C. (2010). A Functional Magnetic Resonance Imaging Study of the Cognitive Estimation. *Activitas Nervosa Superior Rediviva*, 52(3), 187-192.
- Huang, H.-M. E. (2015). Children's Performance in Estimating the Measurement of Daily Objects. In K. Beswick, T. Muir & J. Wells (Hrsg.), *Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference*, (Bd. 3, S. 73-80). Hobart, Australia: PME.
- Joram, E. (2003). Benchmarks as Tools for Developing Measurement Sense. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 57-67). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Joram, E.; Gabriele, A. J.; Bertheau, M.; Gelman, R. & Subrahmanyam, K. (2005). Children's Use of the Reference Point Strategy for Measurement Estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23.
- Joram, E.; Subrahmanyam, K. & Gelman, R. (1998). Measurement Estimation: Learning to Map the Route from Number to Quantity and Back. *Review of Educational Research*, 68(4), 413-449.
- Kaufmann, L.; Nuerk, H.-C.; Konrad, K. & Willmes, K. (2007). *Kognitive Entwicklungspsychologie*. Göttingen: Hogrefe.
- Konrad, K. (2007). Entwicklung von Exekutivfunktionen und Arbeitsgedächtnisleistungen. In L. Kaufmann; H.-C. Nuerk; K. Konrad & K. Willmes (Hrsg.), *Kognitive Entwicklungspsychologie* (S. 300-320). Göttingen: Hogrefe.
- Kosslyn, S. M.; Thompson, W. L. & Ganis, G. (2006). *The Case for Mental Imagery*. New York: Oxford UP.
- Kubesch, S. & Walk, L. (2009). Körperliches und kognitives Training exekutiver Funktionen in Kindergarten und Schule. *Sportwissenschaft* 39(4), 309-317.
- Kuwahara Lang, F. (2001). What is a "Good Guess," Anyway? Estimation in Early Childhood. *Teaching children mathematics* 7(8), 462-466.
- Lehrer, R.; Jaslow, L. & Curtis, C. (2003). Developing an Understanding of Measurement in the Elementary

- Grades. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 100-121). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Liss, M.; Fein, D.; Bullard, S. & Robins, D. (2000). Brief Report: Cognitive Estimation in Individuals with Pervasive Developmental Disorders. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 30(6), 613-618.
- MacPherson, S. E.; Wagner, G. P.; Murphy, P.; Bozzali, M.; Cipolotti, L. & Shallice, T. (2014). Bringing the Cognitive Estimation Task into the 21<sup>st</sup> Century: Normative Data on Two New Parallel Forms. Abgerufen von <http://journals.plos.org/plosone/article/file?id=10.1371/journal.pone.0092554&type=printable> (Zugriff 11.05.2017).
- Maier, P. H. (1999). Raumgeometrie mit Raumvorstellung – Thesen zur Neustrukturierung des Geometrieunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 45(3), 4-18.
- Mandl, H.; Kopp, B. & Dvorak, S. (2004). Aktuelle theoretische Ansätze und empirische Befunde im Bereich der Lehr-Lern-Forschung – Schwerpunkt Erwachsenenbildung. Abgerufen von [https://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2004/mandl04\\_01.pdf](https://www.die-bonn.de/esprid/dokumente/doc-2004/mandl04_01.pdf) (Zugriff 11.05.2017)
- Mendez, M. F.; Doss, R. C. & Cherrier, M. M. (1998). Use of the Cognitive Estimation Test to Discriminate Frontotemporal Dementia from Alzheimer's Disease. *Journal of Geriatric Psychiatry and Neurology*, 11(1), 2-6.
- Nührenböcker, M. (2004). Children's measurement thinking in the context of length. In Törner, G.; Bruder, R.; Peter-Koop, A.; Neill, N.; Weigand, H.-G. & Wollring, B. (Hrsg.). *Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries. Selected Papers of the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Ludwigsburg, March 5-9, 2001* (S. 95-106). Hildesheim: Franzbecker.
- Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and everyday cognition. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 557-574). New York: Macmillan.
- O'Daffer, P. (1979). A Case and Techniques for Estimation: Estimation Experiences in Elementary School Mathematics – Essential, Not Extra! *The Arithmetic Teacher*, 26(6), 46-51.
- Paenza, A. (2012). *Mathematik durch die Hintertür. Faszinierende Reisen in die Wunderwelt der Zahlen*. Köln: Anaconda-Verlag.
- Peretti Wagner, G.; MacPherson, S. E.; Parente, M. A. M. P.; Trentini, C. M. (2011). Cognitive estimation abilities in healthy and clinical populations: the use of the Cognitive Estimation Test. *Neurological Sciences*, 32(2), 203-210.
- Peter-Koop, A. (2008). Eine unbekannte Größe? Entwicklung von Kompetenzen im Bereich Größen und Messen. *Grundschule*, 40(4), 20-22.
- Peter-Koop, A. & Nührenböcker, M. (2011). Größen und Messen. In G. Walther; M. van den Heuvel-Panhuizen; D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 89-117). 5. Auflage. Berlin: Cornelsen.
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Klett.
- Pike, C. D. & Forrester, M. A. (1997). The Influence of Number-sense on Children's Ability to Estimate Measures. *Educational Psychology* 17(4), 483-500.
- Posner, M. I. & Koppitz, W. J. (1976). *Kognitive Psychologie. Grundfragen der Psychologie*. München: Juventa.
- Reuter, D. (2011). *Kindliche Konzepte zur Größe Gewicht und ihre Entwicklung. Theoretische Modellierung und zwei Einzelfallstudien mit Drittklässlern*. Abgerufen von <http://edoc.hu-berlin.de/dissertationen/reuter-dinah-2011-05-23/PDF/reuter.pdf> (Zugriff 23.05.2017).
- Ruwisch, S. (2012). Hohlmaß, Fassungsvermögen, Rauminhalt oder Volumen? *Grundschule Mathematik*, 34, 40-43.
- Ruwisch, S. (2014). Das Ungefähre zu schätzen wissen. Die Bedeutung des Ungefähren und wie man sich ihm nähert. *Grundschule Mathematik*, 42, 4-5.
- Schmer, F. J. (2006). *Lernen und Gedächtnis*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Siegel, A. W.; Goldsmith, L. T. & Madson, C. R. (1982). Skill in Estimation Problems of Extent and Numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 211-232.
- Shallice, T. & Evans, M. E. (1978). The Involvement of the Frontal Lobes in Cognitive Estimation. *Cortex: a Journal Devoted to the Study of the Nervous System and Behaviour*, 14(2), 294-303.
- Smith, E. E. & Jonides, J. (1999). Storage and Executive Processes in the Frontal Lobes. *Science*, 283(1654), 1657-1661.
- Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 371-389). New York: Macmillan.
- Stephan, M. & Clements, D. H. (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and Teaching Measurement* (S. 3-16). Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ullsperger, M. & von Cramon, D. Y. (2006). Funktionen frontaler Strukturen. In H.-O. Karnath & P. Thier (Hrsg.), *Neuropsychologie* (S. 479-488). 2. Auflage. Heidelberg: Springer.
- Van der Meer, E. (2006). Langzeitgedächtnis. In J. Funke & J. Bengel (Hrsg.). *Handbuch der Allgemeinen Psychologie – Kognition* (S. 346-355). Göttingen: Hogrefe.
- Winter, H. (2003). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens. Funktionen des Sachrechnens. Unterrichtsprojekte*. 6. Auflage. Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

### Anschrift der Verfasser

Dana Farina Weiher  
Leuphana Universität Lüneburg  
Institut für Mathematik und ihre Didaktik  
Universitätsallee 1  
21335 Lüneburg  
weiher@leuphana.de

Silke Ruwisch  
Leuphana Universität Lüneburg  
Institut für Mathematik und ihre Didaktik  
Universitätsallee 1  
21335 Lüneburg  
ruwisch@uni.leuphana.de

Anhang

Anwenden von Schätzstrategien beim Schätzen von Größen (Schätzen im engeren Sinne)

<p style="text-align: center;"><b>Mentales Operieren mit Stützpunkten</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>Stützpunktwissen/ Stützpunktvorstellungen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zu Objekten Größenangabe kennen</li> <li>• Zu Größenangaben Objekte kennen</li> <li>• Ungefähre Vorstellung der Größenangabe einer Größe des Objekts</li> </ul> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>Vergleichen</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpretieren von Gemeinsamkeiten und Unterschieden</li> <li>• Visuelles Gedächtnis</li> </ul> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>Räumliche Vorstellung</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mentale Rotation</li> <li>• Veranschaulichung</li> <li>• Mentale Bilder</li> </ul> </div>	<p style="text-align: center;"><b>Wissen über den Messprozess</b></p> <p style="text-align: center;"><i>Wissen über Einheiten</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gleiche Einheiten sind gleich groß</li> <li>• Kenntnis über Einheiten eines Größenbereichs und deren Reihung</li> <li>• Tradition und Sinnhaftigkeit von Einheiten</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Wissen über das Nutzen von Einheiten</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Lückenloses Aneinanderlegen (Iteration)</li> <li>• Vervielfachen/Verrechnen von Einheiten</li> <li>• Wissen um relative Genauigkeit</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Wissen über Größenangaben</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zusammenhang zwischen Maßzahl und Einheit</li> <li>• Unterschiedliche Einheiten werden unterschiedlich gezählt</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>Exekutive Funktionen</b></p> <p style="text-align: center;"><i>Vorbereitend (Strategieauswahl)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Planen</li> <li>• Problemlösen</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Ausführend (Strategieanwendung)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zielführendes Verhalten</li> <li>• Inhibition</li> <li>• Mehrschrittiges Handeln</li> <li>• Kognitive Flexibilität</li> <li>• Ressourcenverteilung</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Überprüfend (Strategie- und Ergebnisreflexion)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reflexionsstrategien</li> </ul>
---	--	--

**Allgemeines (mathematisches) Wissen und grundlegende Fähigkeiten**

<p style="text-align: center;"><b>Geometrische Kenntnisse</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Konzept der entsprechenden Größe</li> <li>• Implizites und explizites Formelwissen</li> <li>• Wissen über Objekte als Träger mehrerer Größen</li> <li>• Konzept deckungsgleich/auslegungsgleich/zerlegungsgleich</li> <li>• Invarianz</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>Arithmetische Kenntnisse</b></p> <p style="text-align: center;"><i>Wissen über Zahlen/Zahleigenschaften</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kenntnis der Zahlenreihe</li> <li>• Mentales Zählen</li> <li>• Dezimalzahlen, Brüche</li> <li>• Zahlaspekte</li> </ul> <p style="text-align: center;"><i>Rechnen</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundrechenarten</li> <li>• Verdoppeln/Halbieren</li> <li>• Runden</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>Visuelle Wahrnehmung</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gestatgesetze der Wahrnehmung</li> <li>• Theorie der Komponentenerkennung</li> <li>• Rekognition/Wahrnehmungskonstanz</li> <li>• Visuelle Unterscheidung</li> <li>• Figur-Grund-Diskrimination (Abstraktion eines Merkmals)</li> </ul>
---	--	--